Subject:
Year. Month. Date. ( )

دینامیک

منبع آموزشی) دینامیک مریام چاپ ششم ، 1986 ،

امتحان میان‌ترم) ۲۵ ، ۸ ، ۸۴

ارزشیابی) میان‌ترم ۷ پایان ترم ۸ تکلیف ۳ حضور و غیاب ۲

تا پایان فصل دوم + کار انرژی + [illegible]

دینامیک) حرکت اجسام تحت تأثیر نیروهای وارده را بررسی می‌کند

دینامیک:
- سینماتیک) بررسی حرکت بدون در نظر گرفتن عامل حرکت
- سینتیک) در تحلیل حرکت از عامل حرکت (نیرو) صحبت می‌شود

دینامیک:
- ذره) جسمی است که در هنگام حرکت از ابعاد آن صرف نظر می‌کنیم
- جسم صلب) ابعاد جسم در بررسی حرکت مهم هستند ابعاد جسم صلب در حین حرکت ثابت است

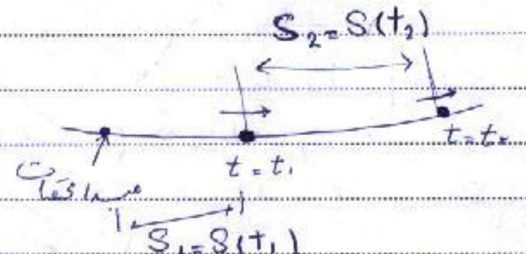
حالت جسم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل دوم) دینامیک ذره

* حرکت ذره
  * مستقیم الخط
  * منحنی الخط
    * در صفحه
    * در فضا

حرکت مستقیم الخط ذره)



جهت مشخصات ذره در هر لحظه

سرعت متوسط در فاصله زمانی t_2, t_1 ● سرعت متوسط $v_{ave} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$

واحد m/s

(اسکالر t) ● سرعت لحظه‌ای $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{d(t)} s(t)$

شتاب متوسط در بازه زمانی t_2, t_1 ● شتاب متوسط $a_{ave} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

واحد m/s^2

(دو حالت t) ● شتاب لحظه‌ای $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt} s\right] = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

فرمول‌ها $v = \frac{ds}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$ $\Longrightarrow$ ضرب درهم

$$\begin{cases} v\,dt = ds \\ a\,dt = dv \end{cases} = \begin{cases} a v\,dt = a\,ds \\ v a\,dt = v\,dv \end{cases}$$

$\rightarrow$ $v\,dv = a\,ds$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$2P = (m_A + m_B)a \Rightarrow a = \frac{80}{100+20} = 0.66\ \frac{m}{s^2}$

وضعیت دوم ; $P = 60$ $2P = 120 > f_{s\,max}$ دو جسم نسبت به هم حرکت دارند

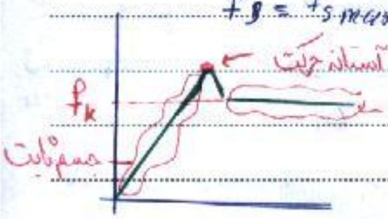
$f = \mu_k N_A = \mu_k m_A g = (0.5)(20)(9.81) = 98.1$

$a_A = \frac{1}{20}(120 - 98.1)$ $a_B = \frac{98.1}{100}$

اصطکاک استاتیک و اصطکاک دینامیک

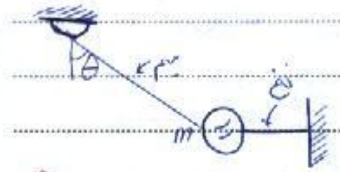
اصطکاک استاتیک $f_s \le \mu_s N$ برای آستانه حرکت $f_s = \mu_s N$

$f_s = f_{s\,max} = \mu_s N$ ضریب اصطکاک استاتیک



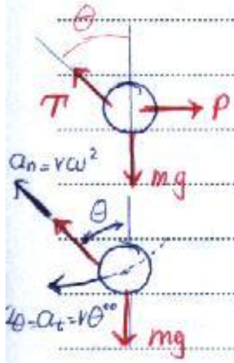
$f_k = \mu_k N$ اصطکاک دینامیک

مثال: مطلوب است نسبت کشش در سیم بلافاصله پس از بریده شدن نخ به کشش در سیم قبل از بریده شدن نخ



$\sum F_y = ma_y$ $T_0\cos\theta - mg = 0$ $T_0\cos\theta = mg$

$T_0 = \frac{mg}{\cos\theta}$



چون سیستم از حالت سکون شروع به حرکت کرده است $a_n = r\omega^2 = 0$ می گردد

$\omega = 0 \rightarrow a_n = r\omega^2 = 0$

$\sum F_n = ma_n$

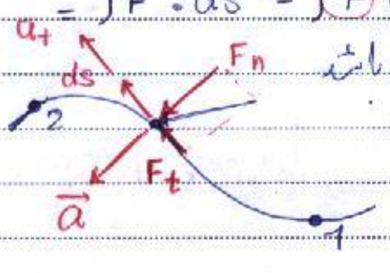
$T - mg\cos\theta = m(0)$ $T = \frac{mg}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{T}{T_0} = \cos^2\theta$

PAPNO

قانون کار و انرژی)

کار = نیرو × جابجایی

$= \int \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int \vec{F}\, ds \cos\alpha = \int F_t\, ds$



حاصلضرب آن مؤلفه‌ای از نیرو که در راستای جابجایی باشد

حاصلضرب نیرو در نقطه اثر نیرو در امتداد جابجایی

$\Delta U = \int F_t\, ds = \int m a_t\, ds$, $a_t = \frac{dv}{dt}$

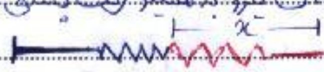
$a\, ds = v\, dv \Leftarrow dv \frac{ds}{dt}$

$\Delta U = \int_1^2 m v\, dv = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \Delta T$

کار حاصل از نیروها از 1 به 2 برابر است با تغییر در انرژی جنبشی

$\Delta U = \Delta T$

تعریف) نیروی کنسرواتیو نیرویی است که کار حاصل از آن نیرو به مسیر حرکت بستگی ندارد



مانند نیروی وزن و نیروی فنر

کار نیروی فنر $= \frac{1}{2} k x^2$ نیروی فنر $F = kx$

$\frac{1}{2}$ در فرمول برای آن است که به صورت تدریجی فنر کار انجام می‌دهد و متوسط کار را در نظر می‌گیریم

کار نیروی فنر همیشه منفی است (چه جمع شود و چه کشیده شود) ولی در چه جمع شود و چه کشیده شود انرژی ذخیره شده در فنر همواره مثبت است

کار دیگر نیروها به غیر از نیروی وزن و فنر + کار نیروی وزن + کار نیروی فنر $= \Delta U$ کار کل نیروها

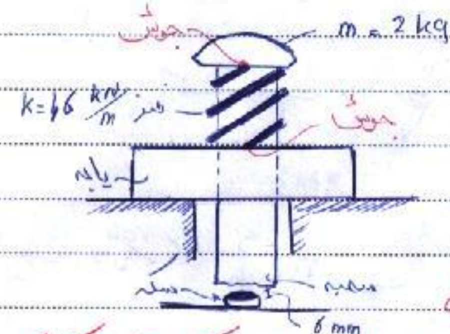
$\Delta U = \Delta T$

کار کل نیروها غیر از وزن و فنر $\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ ← تغییر در انرژی ارتفاعی یا فنر

تغییر انرژی جنبشی سیستم — تغییر در انرژی پتانسیل کل

در قانون کار و انرژی همیشه مجاز به استفاده از سرعت نسبی نیستیم زیرا این قانون بر اساس قانون دوم نیوتن که در آن شتاب مطلق است ثابت شده

برای محاسبه انرژی پتانسیل فنر مبدأ مختصات تعادل استاتیکی فنر هستند. تعادل استاتیک یعنی بحالتی که فنر نه کشیده شده و نه فشرده



مثال) در حال تعادل استاتیک سیستم مهره و فاصله ۶ میلی‌متری از سکه قرار دارد. مهره را به اندازه 40 mm از وضعیت تعادل پایین برده و رها می‌کنیم. مهره با چه سرعتی به سکه برخورد می‌کند

وضعیت 1) وضعیتی که مهره از تعادل استاتیک سیستم به اندازه 40 mm پایین برده شده

وضعیت 2) وضعیتی که مهره با سرعت V_2 با سکه برخورد می‌کند

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

به این دلیل که نیروی جوش در سیستم داخلی است انرژی‌اش را صرف نظر می‌کنیم و فقط به محاسبه نیروهای خارجی جرم و فنر می‌پردازیم $\Rightarrow \Delta U = 0$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m (V_2^2 - \cancel{V_1^2}) = \frac{1}{2} m V_2^2$$

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k} = \frac{2 \cdot 9.81}{1.6 \times 10^3} \times 10^3$$

$$\Delta V_g = -mg(40+6) \times 10^{-3}$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} \overbrace{k}^{1.6 \times 10^3} (x_2^2 - x_1^2)$$

$x_2 = (6+\delta_{st}) \times 10^{-3}$ ، $x_1 = (40-\delta_{st}) \times 10^{-3}$

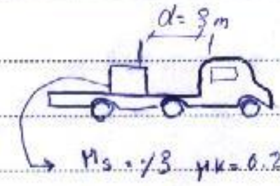
$\Rightarrow V_2$ ✓

مسئله‌های فصل 2، 209، 217، 222، 220، 237

فصل 3 مسئله 9، 10، 25، 35، 45، 44

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسئله ۱۴ فصل ۱۳

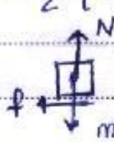


کامیونی از سرعت $70\ \frac{km}{h}$ در اثر ترمز کردن با شتاب ثابت در طول مسافت 50 متری ایستاد. آیا بسته از روی کف کامیون سر می‌خورد. اگر سر می‌خورد سرعت سرخوردن چقدر است.

پاسخ

$v\,dv = a\,ds \qquad \int v\,dv = \int a\,ds \qquad \int_{70\times\frac{5}{18}}^{0} v\,dv = a\int_0^{50} ds$

$\frac{1}{2}\left[0-\left(70 * \frac{5}{18}\right)^2\right] = a * 50 \qquad a_{Truck} = -3.78\ \frac{m}{s^2}$ شتاب کامیون



فرض: بسته در آستانه لغزش است

$-f = ma$

$-\mu_s mg = ma \qquad \mu_s = -\frac{a}{g}$ حداقل ضریب اصطکاک باید و کامیون برای آنکه جسم سر نخورد

$\mu_s = \frac{-3.78}{9.81} = 0.385 \qquad \mu_s = 0.3 < 0.385 \qquad f = \mu_k N = \mu_k mg$

$-f = ma \qquad -\mu_k mg = ma \qquad a = -\mu_k g \qquad a_{box} = -0.25 \times 9.81 = -2.45\ \frac{m}{s^2}$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \qquad a_b = a_T + a_{b/T}$ شتاب بسته نسبت به کامیون

$-2.45 = -3.78 + a_{b/T} \Rightarrow a_{b/T} = 1.33\ \frac{m}{s^2}$

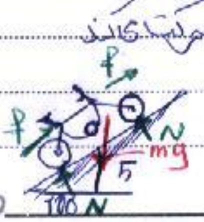
نسبی $\int_0^{v_{B/T}} v_{b/T}\,dv = \int_0^{d} a_{b/T}\,ds \qquad = \frac{1}{2}(v_{B/T})^2 - 0 = a_{b/T} * d$

$v_{B/T} = \sqrt{2 * 1.33 * 3} = 2.82\ \frac{m}{s}$

تعریف توان (سرعت انجام کار) (P, power)

$P = \frac{\text{کار نیروهای خارجی}}{\text{زمان}} \qquad$ توان یا قدرت $= \frac{\Sigma \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F}\cdot\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad P = F.v$

مثال: دوچرخه سواری با سرعت $20\ \frac{km}{h}$ از سطح شیب‌داری با شیب ۵٪ به سمت بالا حرکت می‌کند. توان دوچرخه سوار چقدر است. $m = 95$



توان $= (mg\sin\alpha)\,v = 95 \times 9.81 \times \sin\alpha \times 20 \times \frac{5}{18}$

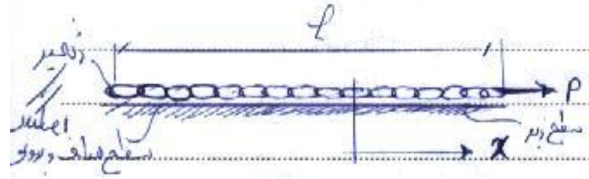
توان $P = 259$ وات

PAPNO

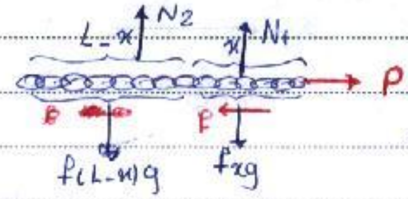
Subject:
Year. Month Date. ( )

در مخلوط معمولاً کار نیروی اصطکاک صفر است. زیرا نیروی اصطکاک به نقطه‌ای اعمال می‌شود که سرعت آن نقطه صفر است

مسأله 31 فصل 13



اگر ρ جرم واحد طول زنجیر باشد و زنجیر در ابتدا در وضعیت $x=0$ باشد. سرعت زنجیر را وقتی که تمام آن روی سطح زبر قرار می‌گیرد تعیین کنید.



$$\Sigma F_x = ma_x \rightarrow -\mu_k N_1 + P = ma$$

$f x g$

$$-\mu_k f x g + P = \rho L a$$

$$v\,dv = a\,ds \qquad \int_0^{v} v\,dv = \int_0^{L} \frac{-\mu_k f x g + P}{\rho L}\,dx$$

$$\frac{1}{2}v^2 - 0 = \left[-\mu_k f g \frac{L^2}{2} + PL\right] \Rightarrow v = \checkmark$$

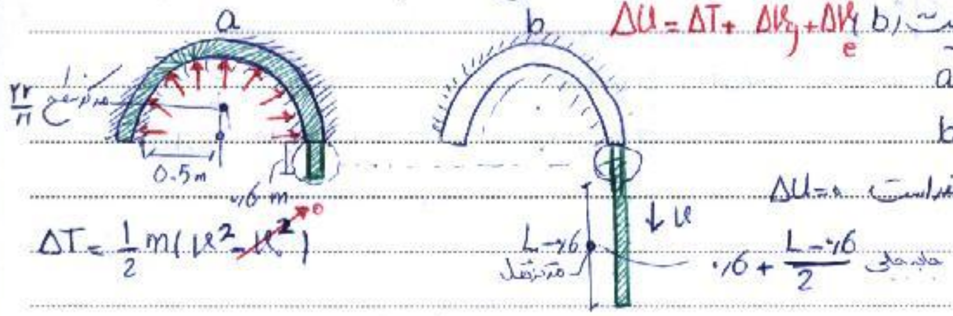
طناب همانند وضعیت a از حال سکون رها می‌شود. سطح صاف و بدون اصطکاک است مطلوب است سرعت طناب در وضعیت b

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

(1) وضعیت a

(2) وضعیت b

کار نیروی N صفر است $\Delta U = 0$



$$\Delta T = \frac{1}{2}m(v^2 - \cancel{v_0^2})$$

$0.6 + \frac{L-0.6}{2}$ جابجایی

$$\Delta V_g = -mg\left(y_1 + 0.6 + \frac{(L-0.6)}{2}\right) \qquad \Delta V_e = 0$$

$\frac{m}{L}(L-0.6)$

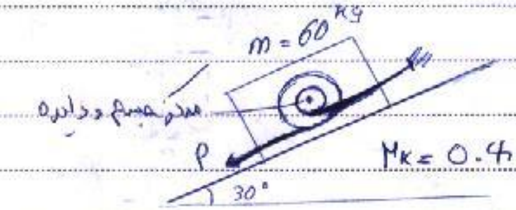
$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{m}{L}(L-0.6)\,g\left(\frac{2r}{\pi} + 0.6 + \frac{L-0.6}{2}\right)$$

$$L = 2\pi \times 0.5 \times \frac{1}{2} + 0.6$$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date.

مثال ۲

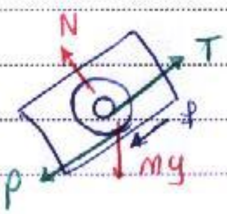


جسم از حال سکون روی سطح شیب‌دار در نتیجه اعمال نیروی P به طناب شروع به حرکت می‌کند پس از طی 1.4 متر در امتداد سطح شیب‌دار سرعت جسم چقدر است
$P = 600\ N$ نسبت قطرها 1 به 2
از اصطکاک های داخلی قرقره‌ها صرف نظر می‌کنیم

چرا با اینکه نیرو به سمت پایین است جسم بالا می‌رود
چرا اگر طناب 6 متر جابه‌جا شود جسم هم 5 متر جابه‌جا می‌شود
مرکز جرم در تحلیل حرکت بالای ما مهم است نه طناب

$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

① وضعیت اول سیستم
② سیستم 1.4 متر به سمت بالا جابه‌جا شده است



کار نیروی کشش چون حرکت ندارد چون جابه‌جا نمی‌شود

$\Delta U = -\mu_k mg \times 1.4 + T \times 0 + P \times 1.4$ نیرو و جابه‌جایی ها هم جهت هستند

مسافتی که اصطکاک وارد می‌شود

$\Delta T = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$

$\Delta V_g = + mg \times 1.4 \sin 30 \rightarrow v = 2.18$

PAPNO

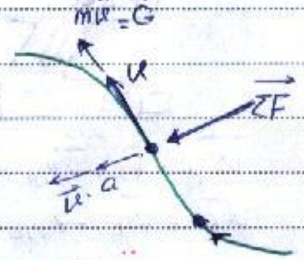
Subject:
Year. Month. Date. ( )

ضربه و مومنتم خطی)

ضربه = نیرو × زمان

مومنتم خطی = جرم × سرعت

$\vec{mv} = \vec{G}$



$\vec{\Sigma F} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{\Sigma F} \cdot dt = m\,d\vec{v}$ // انتگرال $\int_{t_1}^{t_2} \vec{\Sigma F}\,dt = \int_{v_1}^{v_2} m\,dv$

جسم در بازه $\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F\,dt = mv_2 - mv_1 = G_2 - G_1$ تغییرات مومنتم خطی

برایند ضربه نیروهای وارد شده به جسم در بازه زمانی $t_2 - t_1$

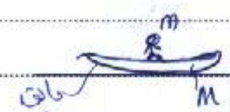
برایند ضرب نیروهای وارد بر جسم برابر است با تغییرات مومنتم خطی

سرعت‌ها حتماً سرعت‌های مطلق هستند (در قانون مومنتم)

قانون بقاء مومنتم خطی) اگر برایند ضربه نیروهای وارد بر جسم صفر باشد بقاء مومنتم خطی را خواهیم داشت

$G_2 - G_1 = \Delta G = 0 \qquad G_2 = G_1$

$\int \Sigma F_x\,dt = \Delta G_x \qquad \int \Sigma F_y\,dt = \Delta G_y \qquad \int \Sigma F_z\,dt = \Delta G_z$



$\Delta G_x = 0 \Rightarrow G_2 - G_1 = 0 \quad mv_1 = Mv_2 \Rightarrow v_2 = \dfrac{m}{M} v_1$

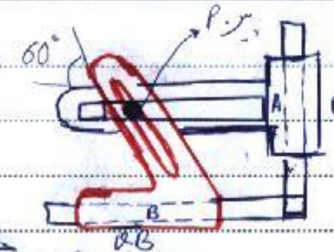
بقای مومنتم خطی در راستای افق

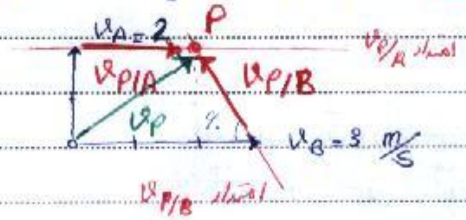
بقای مومنتم در راستای افق صادق است ودر راستای قائم صادق نیست به خاطر بودن نیروی وزن

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date.

مثال) $v_B = 3\,m/s$ $\quad v_A = 2\,m/s$ $\quad \rightsquigarrow v_P = ?$





$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{P/A}$

$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{v}_{P/B}$

$v_A = v_{P/B}\sin 60 \qquad 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{P/B} \qquad v_{P/B} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$v_{P/A} = -\frac{4}{\sqrt{3}}\cos 60 + 3 \qquad v_{P/B} = 3 - \frac{2}{\sqrt{3}}$

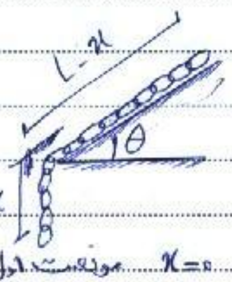
$v_P = \sqrt{(v_A)^2 + (v_{P/A})^2}$

مثال)

زنجیر از حال سکون و از موقعیت $x = 0$ رها می‌شود

سطح صاف و بدون اصطکاک ، سرعت

حلقه های زنجیر بر حسب x



$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

چون N عمود بر مسیر حرکت است $\quad \Delta U = 0$

$\Delta T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - \cancel{v_1^2})$ $\qquad \Delta V_e = 0$

موقعیت اول $\quad x = 0$

موقعیت دوم : موقعیت نشان داده شده $\qquad$ جابجایی مرکز ثقل

$\Delta V_g = -mg\,(\overline{\Delta h})$

$\rightarrow \left[(L - x) + \frac{x}{2} \right] \sin\theta + \frac{x}{2}$

$\Delta V_g = -\frac{m}{L} x g \left(\left[(L - x) + \frac{x}{2} \right] \sin\theta + \frac{x}{2} \right)$

$v = \sqrt{\frac{g}{\ell} x^2 (1 - \sin\theta) + 2 g x \sin\theta}$

$\rightarrow \left[[L - x] + \frac{x}{2} \right] \sin\theta + \frac{x}{2}$

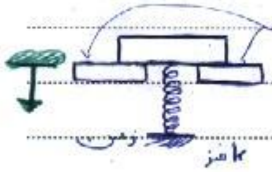
PAPNO

Subject:
Year. Month. Date.

مسأله) در وضعیت نشان داده شده فنر تماس فنر با جرم m هیچ فشردگی در فنر وجود ندارد در صورتی که پایه‌های نگه‌دارنده ناگهان کشیده شوند مطلوب است حداکثر سرعتی که جرم m به آن می‌رسد

حداکثر فشردگی فنر

حداکثر نیرویی که فنر به زمین اعمال می‌کند



$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

① وضعیت نشان داده شده

② جرم به اندازه x پایین آمده و سرعت $\dot{x}$ است

$\Delta U = 0 \quad \Delta T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \Delta V_g = -mgx \quad \Delta V_e = \frac{1}{2} K (x_2^2 - \cancel{x_1^2}) = \frac{1}{2} kx^2$

$-mgx + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 = 0$

$\frac{1}{2} m v_{(x)}^2 - mgx + \frac{1}{2} kx^2 = 0 \qquad \frac{dv}{dx} = 0 \rightarrow x_0$ کجاست سرعت حداکثر است

$mv \cancel{\frac{dv}{dx}} - mg + kx_0 = 0 \Rightarrow mg = kx_0 \qquad x_0 = \frac{mg}{k}$

$v_{max} \Rightarrow$ [illegible] $\frac{1}{2} m v_{max}^2 - mg\left(\frac{mg}{k}\right) + \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{k}\right)^2 = 0$

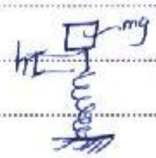
$v_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}}\, g$

ب) $x_{max} \Rightarrow v = 0 \qquad -mgx + \frac{1}{2} kx^2 = 0 \qquad x = \frac{2mg}{k}$

ج) $F_{max} = kx_{max} = 2mg$ چون بارگذاری ناگهانی است

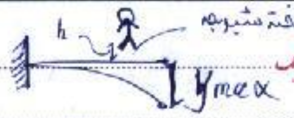
اگر بارگذاری تدریجی باشد $F_{max} = mg$ می‌شود

نیروی معادل بارگذاری استاتیک $F_{dyn} = mg \underbrace{\left(1 + \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}\right)}_{\text{ضریب ضربه}}$ تغییر طول فنر در بارگذاری تدریجی



PAPNO

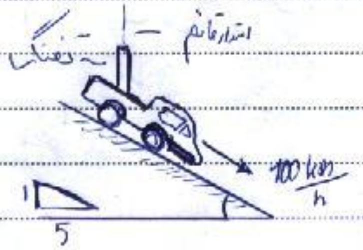
Subject:
Year. Month. Date. ( )



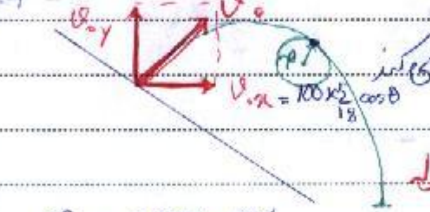
بارگذاری دینامیک

$\downarrow \leftarrow mg\left(1+\sqrt{1+\frac{2H}{\Delta_{st}}}\right)$

بارگذاری به صورت استاتیک



مثال) سرعت خروج گلوله از لوله تفنگ $500\ m/s$ است
در صورتی که شیب جاده 20% و سرعت خودرو $100\ km/h$
باشد مطلوب است
الف) شعاع انحنای مسیر حرکت گلوله در ارتفاع حداکثر
ب) دوری یا مسافتی که گلوله در امتداد سطح شیب دار طی می کند



سرعت گلوله نسبت به ماشین   ماشین   مطلق

v مطلق گلوله $= \vec{v} + \vec{v}$ $\qquad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$

$v_{0x} = 27.24\ m/s$ $\qquad \theta = \tan^{-1}\frac{1}{5}$

$v_{0y} = 500 - 100 \times \frac{5}{18} \times \sin\theta = 494.54$

در نقطه اوج $a_n = g$

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$

از مولفه های سرعت گلوله در نقطه اوج $v_y = 0$

$\Sigma F_x = 0 \quad a_x = 0 \Rightarrow v_x =$ ثابت

v_x گلوله حالت v_{0x} است که برابر 27.24 است

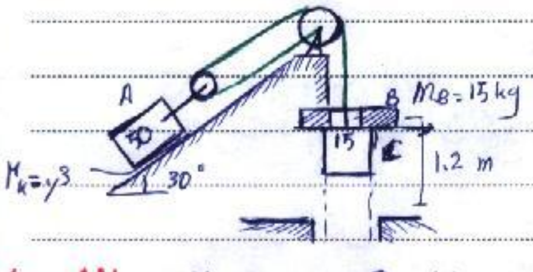
در نقطه اوج چون v_y صفر است v برابر با مقدار v_x است $\qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$g = \frac{(v_x)^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{(27.84)^2}{9.81} = 75.63$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) سیستم از حال سکون و از وضعیت نشان داده شده رها می‌شود. مطلوب است مسافتی که جرم A روی سطح شیب‌دار تا توقف کامل طی می‌کند.



وضعیت نشان داده شده (1) سیستم در حال سکون

(2) جرم B در آستانه تماس با تکیه‌گاه

(3) سیستم حالت متوقف شده

2،1 بین: $\Delta U = -\mu_k m_A g \cos\theta \cdot \frac{1.2}{2}$

$f_k = \mu_k N$

$N = mg\cos\theta$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - \cancel{v_1^2}) = \frac{1}{2} m_A v_{2A}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{2B}^2 + \frac{1}{2} m_C v_{2C}^2$$

$$\Delta V_g = +mg \frac{1.2}{2} \sin\theta - (m_C - m_B) g \cdot 1.2$$

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

سرعت A نصف سرعت v_C و v_B است (به دلیل وجود قرقره‌ها)

از معادله $v_{2C} = 2.469\ m/s$ $v_{2A} = 1.234\ m/s$

3،2 بین: فرض جرم A روی سطح شیب‌دار از 2 به 3 به اندازه x جابجا شده است

$$\Delta U = -\mu_k m_A g \cos\theta \cdot x$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m (\cancel{v_3^2} - v_2^2) = -\frac{1}{2} m_A v_{2A}^2 - \frac{1}{2} m_C v_{2C}^2$$

$$v_{2A} = \frac{1}{2} v_{2C}$$

$$\Delta V_g = +m_A g x \sin\theta - m_C g (2x) \implies x = 1.0689\ m$$

کل جابجایی جرم A برابر است با 1.6689 متر

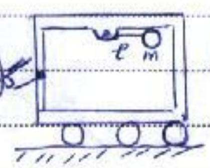
$$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\int \sum \vec{F} \cdot dt = \Delta \vec{G} = \vec{G}_2 - \vec{G}_1$ مومنتم خطی $G = mv$

سوال) سیستم از حال سکون در وضعیت نشان داده شده رها می‌شود مطلوب است سرعت نسبی گلوله وقتی گلوله در حالت قائم قرار می‌گیرد.

$6m$ گاری 

وضعیت 1 : وضعیت نشان داده شده

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ وضعیت 2 : وقتی گلوله در راستای قائم قرار می‌گیرد

$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ کشش کابل و نیروی مفصل ها داخلی هستند و نیروی N هم بر مسیر حرکت عمود است پس کار آنها صفر است

$\Delta U = 0$

$$\Delta T = \frac{1}{2}(6m)(v_{2M}^2 - \cancel{v_{1M}^2}) + \frac{1}{2}m(v_{2m}^2 - \cancel{v_{1m}^2}) \Leftarrow \Delta T$$

$$\Delta V_g = -mgh = -mg\ell$$

$$+ \quad \frac{1}{2}(6m)(v_{2M}^2) + \frac{1}{2}m(v_{2m}^2)^2 - mg\ell = 0$$

بقای مومنتم خطی در راستای افق داریم یعنی هیچ نیروی خارجی افقی به سیستم وارد نمی‌شود

$$\int \sum F_x \, dt = G_{2x} - G_{1x}$$

$$G_{2x} = G_{1x}$$

$$G_1 = 6m\cancel{v_{1M}} + m\cancel{v_{1m}} \Rightarrow G_{1x} = 0 \qquad G_2 = 6mv_{2M} + mv_{2m}$$

$$\rightarrow 6mv_{2M} + mv_{2m} = 0$$

$$v_{2M} = -\frac{1}{6}v_{2m}$$ سرعت ها مطلق است و جهت آنها خلاف هم هستند

$$6v_{2M}^2 + (-6v_{2M})^2 - 2g\ell = 0 \qquad v_{2M} = \sqrt{\frac{g\ell}{21}} , \Rightarrow v_{2m} = -6\sqrt{\frac{g\ell}{21}}$$

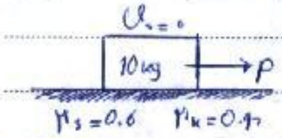
$$v_{2m} = \underset{\text{بزرگ}}{v_{2M}} + v_{2m/M} \qquad -6\sqrt{\frac{g\ell}{21}} = \sqrt{\frac{g\ell}{21}} + v_{m/M}$$

$$v_{m/M} = -7\sqrt{\frac{g\ell}{21}}$$ چون هردو سرعت در یک راستا هستند جمع برداری ساده داریم

PAPNO

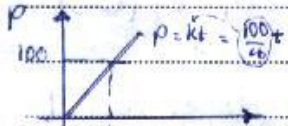
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال 3/178)

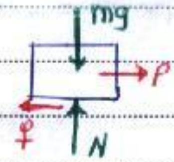


نیروی P از صفر مانند منحنی روبرو افزایش می‌یابد مطلوب است سرعت بسته پس از 4 ثانیه

هر ارتباطی که بین زمان و سرعت وجود دارد ضربه و مومنتم خطی است



$$\int \Sigma\vec{F}\, dt = \Delta\vec{G} \rightarrow \int \Sigma \vec{F}_x\, dt = \Delta \vec{G}_x = \vec{G}_{2x} - \vec{G}_{1x}$$



$$\int_{t=t^*}^{t=4} \Sigma F_x\, dt = G_{3x} - G_{2x}$$

$t=0 \leftarrow$ (1)

استاتیک حرکت $t = t^*$ (2)

$t = 4$ (3)

جسم وقتی شروع به حرکت می‌کند که $f_{s\,max}$ و P_{max} برابر باشد $f = f_{s\,max} = \mu_s N = \mu_s mg$

$f_{max} = (0.6)(10)(9.8) = 58.86\ N$

$\frac{100}{4} t^* = 58.86 \Rightarrow t^* = 2.354\ (s)$

شروع حرکت

$$\int_{2.354}^{4} \Sigma F_x\, dt = \int_{2.354}^{4} \left(\frac{100}{4}t - \overset{\mu_k mg}{f}\right) dt = G_{3x} - \cancel{G_{2x}}^{\,0} = m v_3$$

$$\int_{2.354}^{4} \left(\frac{100}{4}t - 0.4 \times 10 \times 9.81\right) dt = 10 v_3 \Rightarrow v_3 = 6.6121\ (m/s)$$

مثال 3/183) هاکی روی یخ

جرم توپ = 0.20

زمان تماس چوب با توپ = 0.04

مطلوب است نیروی متوسط اعمالی از طرف چوب به توپ

چون از ضربه، زمان، سرعت، نیرو صحبت شده از مومنتم خطی استفاده می‌کنیم بعد از برخورد

برای اینکه بتوانیم dt را از انتگرال بیرون بیاوریم متوسط ΣF را در نظر می‌گیریم چون زمان برخورد 0.04 بسیار کم است

$\int \Sigma\vec{F}\, dt = \Delta\vec{G}$

$\vec{F}\,\Delta t = \Delta\vec{G} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ $\rightarrow \vec{F} = 144.55 i + 30.8 j$

$F = 147.8N$

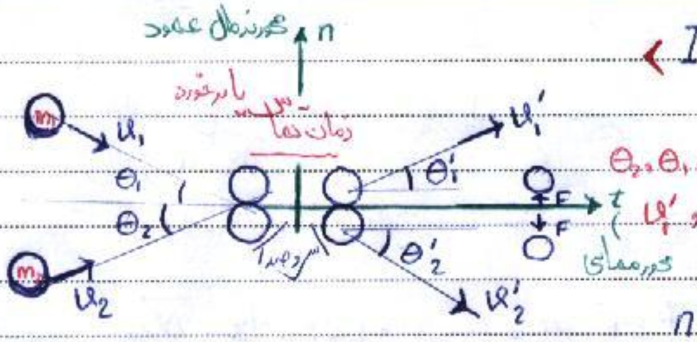
PAPNO

$F \times 0.04 = 0.20\left[\left[18\cos 20 i \mp 18\sin 20 j\right] - (-12 i)\right]$

خلاف جهت گرفتیم

Subject:
Year. Month. Date.

برخورد Impact

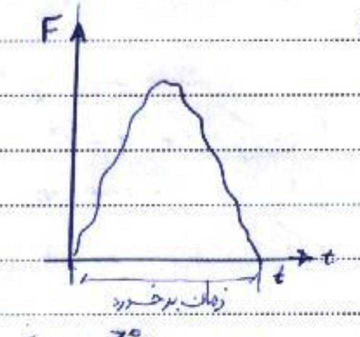


معلومات: m_1 و m_2 و u_1 و u_2 و θ_1 و θ_2

مجهولات: u_1' و u_2' و θ_1' و θ_2'

۱- انتخاب محورهای t و n

نیرویی که دو جسم به هم وارد می‌کنند F در راستای n است



هیچ نیرویی به تک تک ذرات در راستای محور t وارد نمی‌شود
به عبارت دیگر برای تک تک ذرات در راستای t
بقای مومنتم خطی را داریم ولی در راستای n
برای کل سیستم بقای مومنتم خطی را داریم

$\int \cancel{\sum} F\,dt = \Delta G$

1 بقای مومنتم خطی برای جرم m_1 در راستای t

$m_1 u_1 \cos\theta_1 = m_1 u_1' \cos\theta_1'$ $\qquad u_1 \cos\theta_1 = u_1' \cos\theta_1'$

2 بقای مومنتم خطی برای جرم m_2 در راستای t

$m_2 u_2 \cos\theta_2 = m_2 u_2' \cos\theta_2'$ $\qquad u_2 \cos\theta_2 = u_2' \cos\theta_2'$

3 بقای مومنتم خطی برای کل سیستم در راستای n

$m_2 u_2 \sin\theta_2 - m_1 u_1 \sin\theta_1 = m_1 u_1' \sin\theta_1' - m_2 u_2' \sin\theta_2'$

e ضریب استرداد یا بازگشت پذیری (تجربی)

$e = \dfrac{\text{سرعت نسبی دور شدن در راستای } n}{\text{سرعت نسبی نزدیک شدن در راستای } n}$ $\qquad 0 < e < 1$

e به جنس و شکل هندسی اجسام بستگی دارد

$e=1$ الاستیک کامل، یعنی تلفات انرژی نداریم، قانون بقای انرژی جنبشی داریم

$0<e<1$ غیر الاستیک، تلفات انرژی در نتیجه گرما، سر و صدا و تغییر شکل دو جسم در هم اثر کرده است، قانون بقای انرژی جنبشی صادق نیست

PAPNO

$e=0$ غیر الاستیک کامل، دو جسم پس از برخورد کاملاً به هم می‌چسبند، تلفات انرژی داشته و قانون بقای انرژی جنبشی صادق نیست

Subject:
Year. Month. Date. / /

4. $e = \dfrac{v_1' \sin\theta_1' + v_2' \sin\theta_2'}{v_1 \sin\theta_1 + v_2 \sin\theta_2}$

مثال)

مطلوب است سرعت مانع پس از برخورد، درصد انرژی تلف شده.

پاسخ

* برای کل سیستم در راستای افق $\Sigma F x = 0$
* برای کل سیستم در راستای افق بقاء مومنتم خطی داریم

$\Delta G_x = 0$

$m v_1 + M \cancel{v_2} = m v_1' + M v_2'$

$180 * 10^{-3} * 3 * 10^3 = 180 * 10^{-3} * 1.5 * 10^3 + 0.96 * v_2' \qquad v_2' = 281 \, km/h$

درصد انرژی تلف شده $= \dfrac{\text{تغییر در انرژی جنبشی}}{\text{انرژی جنبشی اولیه}} = \dfrac{(\frac{1}{2} m v_1^2) - (\frac{1}{2} m v_1' - \frac{1}{2} M v_2')^2}{\frac{1}{2} m v_1^2} \times 100 = 70\%$

جرم 1 با سرعت 6 m/s در جهت نشان داده شده پرتاب می‌شود جرم 2 در حال سکون است هر دو جرم کاملاً مشابه و ضریب استرداد $e = 0.6$ است.

مطلوب است سرعت و جهت هر یک از جرم‌ها پس از برخورد و انرژی نسبی استهلاک شده در نتیجه برخورد

$v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$

$v_1', \theta_1', v_2', \theta_2'$

$v_1 \Rightarrow \theta_1 = 60 \qquad v_1 = 6 \, m/s \quad \theta_1' = ? \quad v_1' = ? \quad v_2' = ? \quad \theta_2' = 90$

① در راستای t برای m_1: $m_1 v_1 \cos\theta_1 = m_1 v_1' \cos\theta_1'$ — دو معادله و سه مجهول

② در راستای t برای m_2: $\underset{\text{ساکن}}{0} = m_2 v_2' \cos 90 \Rightarrow 0 = 0 \checkmark$

③ در راستای n برای m_1, m_2: $m_1 v_1 \sin\theta_1 + 0 = m_1 v_1' \sin\theta_1' + m_2 v_2'$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$e = \frac{\text{سرعت نسبی دور شدن ذرات در راستای } n}{\text{سرعت نسبی نزدیک شدن ذرات در راستای } n} \qquad e = \frac{v'_2 - v'_1 \sin\theta'_1}{v_1 \sin\theta_1}$$

$$v'_2 - v'_1 \sin\theta'_1 = e\, v_1 \sin\theta_1 \qquad (3)$$

$$(1) = 6 * \cos 60 = v'_1 \cos\theta'_1 \qquad v'_1 = 3.17 \ \mathrm{m/s}$$

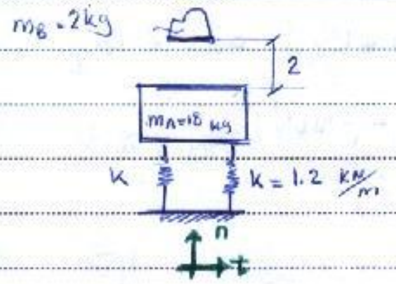
$$(2) \Rightarrow 6 * \sin 60 = v'_1 \sin\theta'_1 + v'_2 \qquad v'_2 = 4.16 \ \mathrm{m/s}$$

$$(3) = .6 \times 6 \sin 60 = v'_2 - v'_1 \sin\theta'_1 \qquad \theta'_1 = 19.1^\circ$$

T_1 انرژی جنبشی قبل از برخورد — T_2 انرژی جنبشی بعد از برخورد

$$\text{درصد اتلاف انرژی} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} * 100$$

$$= \frac{\frac{1}{2} m_1 (6)^2 - \left[\frac{1}{2} m_1 (3.17)^2 + \frac{1}{2} m_2 (4.16)^2\right]}{\frac{1}{2} m_1 6^2} = 24\%$$



3/226) جسم B پس از سقوط بر جسم A می‌چسبد. مطلوب است حداکثر فشردگی فنر.

1) وضعیت نشان داده شده (دقیقاً قبل از برخورد B به A)

زاویه برخورد — 2) دو جسم به هم برخورد کرده به هم چسبیده و هر دو دارای یک سرعت می‌باشند

از 1 به 2 قانون بقای انرژی صادق نیست

از روابط کار و انرژی → 3) حداکثر فشردگی فنر

از 2 به 3 بقای انرژی داریم

$$m_A * 0 + m_B \sqrt{2gh} = (m_A + m_B)\, v$$ دو جسم به هم چسبیده و دارای یک سرعت با هم هستند

$$v = \frac{2}{18+2}\sqrt{2 * 9.81 * 2} = 0.626 \ \mathrm{m/s}$$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ بین 2 و 3

$\Delta T = \frac{1}{2}\underbrace{(m_A + m_B)}_{20}(0 - \frac{v_2^2}{2})$ 0,1626

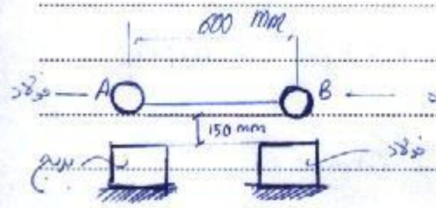
فشردگی فنر

$\Delta V_g = -\underbrace{(m_A + m_B)}_{20} \underset{9.81}{g}\,\delta$

18×9.81 دشتوگی پس از Max

$\Delta V_e = \frac{1}{2}k(x_3^2 - x_2^2)$ $x_2 = \frac{m_A g}{k \times 2}$ $x_3 = x_2 + \delta$

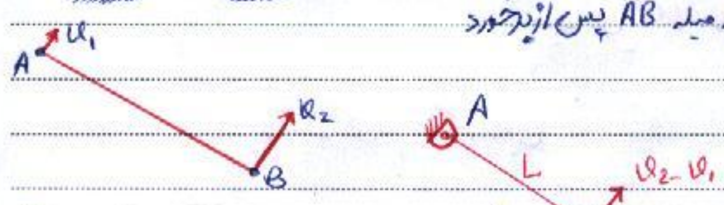
پیش فشردگی $2 \times 1.2 \times 10^3$



$e = 0.4$ فولاد و برنج

$e = 0.6$ فولاد و فولاد

سرعت زاویه میله AB پس از برخورد



$v_B = v_A + v_{B/A}$ $\omega = \frac{v_2 - v_1}{L}$

$v_{1A} = \sqrt{2gh} = v_{2B}$ $v_{2A} = ?$ $0.4\sqrt{2gh}$ $v_{2B} = ?$

$e_{\text{فولاد و برنج}} = \frac{v_{2A}}{\sqrt{2gh}}$ $\omega = \frac{v_{2B} - v_{2A}}{L} = \frac{(0.6 - 0.4)\sqrt{2gh}}{.6000} = /5718$

مسائل

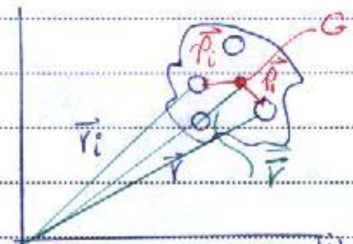
فصل 3 ، 184 ، 215 ، 212 ، 244 ، 253 ، 255

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل چهارم:

سینتیک سیستم ذره:



$$(\Sigma m_i)\vec{\bar{r}} = \Sigma m_i \vec{r}_i \quad = \quad \bar{r} = \frac{\Sigma m_i r_i}{\Sigma m_i}$$

$$\Sigma m_i \vec{\rho}_i = 0$$

قانون دوم نیوتن

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$m_i \Rightarrow F_1 + F_2 + \cdots + f_1 + f_2 + \cdots = m_i \vec{a}_i$$

$m_i \cdots m_2, m_1$ برای کل سیستم = $\Sigma \vec{F} + \cancel{\Sigma \vec{f}}^{\,0} = \Sigma m_i \vec{a}_i$

برآیند کل نیروهای داخلی برای کل سیستم صفر است

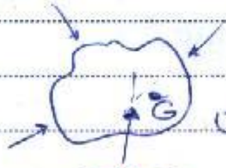
$$\Sigma \vec{F} = \Sigma \vec{m}_i \vec{a}_i$$

برآیند کل نیروهای خارجی

$$\Sigma m_i \vec{\bar{r}} = \Sigma m_i \vec{r}_i \xrightarrow{\text{2 بار مشتق}} (\Sigma m_i)\vec{\bar{a}} = \Sigma m_i \vec{a}_i$$

$$\Sigma F = \Sigma m_i a_i = (\Sigma m_i)\vec{\bar{a}}$$

برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم ذرات برابر است با جرم کل سیستم ضرب در شتاب مرکز ثقل



اگر برآیند وارد بر سیستم ذرات از مرکز ثقل نگذرد سیستم ذرات هم حرکت انتقالی دارد هم حرکت دورانی

انرژی جنبشی سیستم ذرات:

$$m_1 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1$$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

کل سیستم ذرات $T = \sum T_i = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$

سرعت ذره iام نسبت به مرکز ثقل

$\vec{r}_i = \vec{\bar{r}} + \vec{\rho}_i \xrightarrow{\text{مشتق}} \vec{u}_i = \vec{\bar{u}} + \dot{\vec{\rho}}_i$

سرعت مطلق ذره iام — سرعت مرکز ثقل

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{\bar{u}} + \dot{\vec{\rho}}_i)(\vec{\bar{u}} + \dot{\vec{\rho}}_i)$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i [\bar{u}^2 + 2\vec{\bar{u}} \cdot \dot{\vec{\rho}} + \dot{\rho}_i^2]$$

$$T = \bar{u}^2 \underbrace{(\sum \tfrac{1}{2} m_i)}_{\frac{1}{2}m} + 2\vec{\bar{u}} \cdot \cancel{\sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i} + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho}_i^2$$

$\sum m_i \rho_i = 0 \qquad \sum m_i \dot{\rho}_i = 0$

$$T = \frac{1}{2} m \bar{u}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho}_i^2$$

انرژی جنبشی سیستم ذرات برابر است با انرژی جنبشی مرکز ثقل به علاوه انرژی جنبشی تک تک ذرات نسبت به مرکز ثقل.

اگر ذرات نسبت به هم حرکت نداشته باشند $\dot{\rho}_i = 0$ بوده. $T = \frac{1}{2} m \bar{u}^2$

به عبارت دیگر انرژی جنبشی کل سیستم برابر است با انرژی جنبشی مرکز ثقل

مومنتم خطی سیستم ذرات)

$\vec{G}_i = m_i \vec{u}_i$

$\vec{G} = \sum G_i = \sum m_i \vec{u}_i = \boxed{m \vec{\bar{u}}}$

مومنتم خطی سیستم ذرات برابر است با مومنتم خطی مرکز ثقل

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

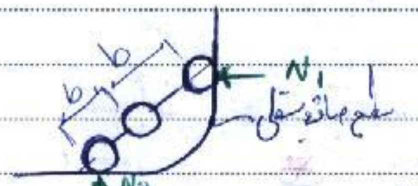
$$\frac{d}{dt}\vec{G} = \frac{d}{dt}\sum m_i \vec{v_i}$$ قانون ضربه و مومنتم خطی سیستم ذرات (

$$= \sum m_i \vec{a_i}$$

$$\int dG = \int \sum m_i \vec{a_i}\, dt = \bar{G}_2 - \bar{G}_1$$

$\Delta G =$ ضربه نیروهای اعمالی به سیستم ذرات

برایند ضربه نیروهای اعمالی به سیستم ذرات برابر است با تغییرات مومنتم خطی مرکز ثقل



سه گلوله مشابه
از وزن میله های رابط صرف نظر می کنیم
سیستم از وضعیت نشان داده شده رها می شود
مطلوب است سرعت سیستم ذرات وقتی افقی می شود

وضعیت نشان داده شده (1
وقتی سیستم ذرات افقی (2

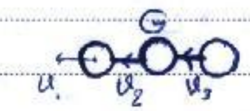
$\Delta U = 0$ کار نیروی N عمود بر مسیر حرکت است

$$\Delta U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

ذره ام ، ρ_i

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho}_i^2$$

ρ_i کوچک است و ثابت و $\dot{\rho}$ صفر است



$$v_1 = v_2 = v_3 = \bar{v}$$

$$\Delta T = \sum \Delta T_i = 3 \times \frac{1}{2} m (v^2 - 0)$$

سرعت در موقعیت 2 ، سرعت در موقعیت 1

$$\Delta V_g = \sum \Delta V_{gi} = -mg(b \sin 45) - mg(2b \sin 45)$$

تغییر ارتفاع مرکز ثقل ها

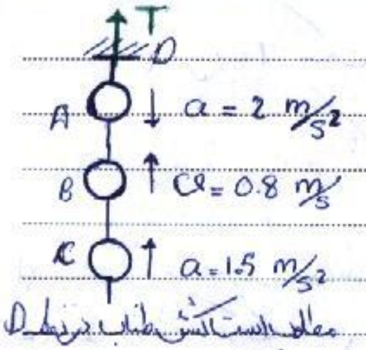
$$\Delta V_e = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} m v^2 = -3 mg\, b \sin 45 \qquad v = \sqrt{2gb \sin 45}$$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال 1)



$$\sum F_y = m\bar{a}_y = \sum m_i a_{iy}$$

$$T - m_A g - m_B g - m_C g = \sum m_i a_i$$

$$= m_A a_A + m_B a_B + m_C A_C$$

مطلوب است کشش طناب در نقطه D

$m_A = 10\,kg \quad m_B = 15\,kg \quad m_C = 18\,kg$

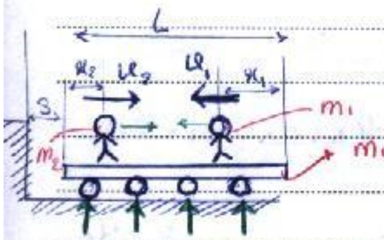
$$T - (10 + 15 + 18) * 9.81 = 10 \times (-2) + 18 (1.5)$$

$$T = 316\ N$$

2 سیستم در حال سکون

دو نفر شروع به حرکت کرده تا همدیگر را ملاقات کنند

مطلوب است فاصله S برحسب x_1 در لحظه تماس دو نفر



$x_2 = 0 \leftarrow x_1 = 0 \leftarrow S = 0 \leftarrow t = 0$

برای سیستم ذرات $\sum F_x = 0$

بقاء مومنتم خطی برای سیستم ذرات

$$\int \sum F_x\, dt = \Delta G_x$$

$$\sum G_{1i} = \sum G_{2i}$$

① سیستم در حال سکون $S = x_1 = x_2 = 0$

② وقتی دو نفر یکدیگر را ملاقات می کنند

v_2 و v_1 سرعت نسبت به ارابه (سرعت های نسبی هستند).

$$\sum G_{2i} = m_0 \underbrace{v}_{\frac{S}{t}} + m_2 (\underbrace{v}_{\frac{S}{t}} + \underbrace{v_2}_{\frac{x_2}{t}}) + m_1 (\underbrace{v}_{S/t} - \underbrace{v_1}_{\frac{x_1}{t}}) = 0$$

$$m_0 S + m_2 (S + x_2) + m_1 (S - x_1) = 0$$

وقتی دو نفر یکدیگر را ملاقات می کنند $x_2 = L - x_1$

$$(m_0 + m_2 + m_1) S + m_2 (L - x_1) - m_1 x_1 = 0$$

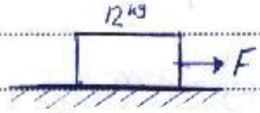
$$S = \frac{(m_1 + m_2) x_1 - m_2 L}{m_0 + m_1 + m_2}$$

چک کردن فرمول $\left.\begin{array}{l} m_1 = m_2 \\ x_1 = \frac{L}{2} \end{array}\right\} S = 0$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) سیستم در $t=0$ ساکن است.



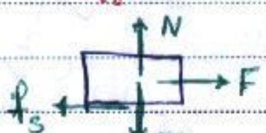
t_0: زمانی که نیروی F بر اصطکاک استاتیک غلبه کند

$\mu_s=0.7$ $\mu_k=0.5$ $f_{s-max}=\mu_s N$ $P\geq\mu_s N$

۱) مطلوب است سرعت Max جسم

۲) کل زمان حرکت جسم

$$\int_{t_0}^{t}\Sigma F_x dt=\Delta G_x$$



$f_{s-max}=\mu_s N=\mu_s mg=0.7\times12\times9.81=82.4N$

$0\leq t\leq4$ $P(t)=\frac{100}{4}t$ $82.4=\frac{100}{4}t_0 \Rightarrow t_0=3.296$

وقتی $P=P_{max}$ $(t=4)$ سرعت جسم حداکثر خواهد شد.

$\int\Sigma F_x\Delta T=\Delta G_x$

۱) $t=t_0$ سرعت جسم صفر

۲) $t=4$ سرعت جسم Max

$$\int_{t=3.296}^{4}(\underbrace{P}_{\frac{100}{4}t}-\mu_k mg)dt=\Delta G_x=m(u_2-\cancel{u_1})$$

$$\frac{100}{8}t^2\Big|_{3.296}^{4}-(0.5)(12)(9.81)(t)\Big|_{3.296}^{4}=12\,u_{max}$$

$u_{max}=1.896\ \frac{m}{s}$

راه اول $\int_4^{t^*}\Sigma F_x dt=m u_{max}$

۲) زمان جسم در $4<t^*<7$

راه دوم $\int_{t_0}^{t^*}\Sigma F_x dt=0$

۱) $t=t_0$

۲) $t=t^*$ جسم متوقف شده است

$\int(P-\mu_k mg)dt=0$

PAPNO

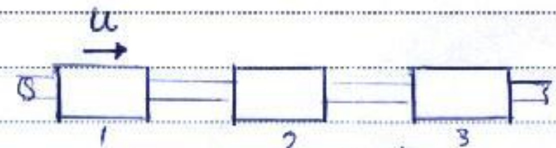
سطح زیر منحنی $\int_{t_0}^{t^*}P\,dt-\int_{t_0}^{t^*}\mu_k mg\,dt=0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{100+82.4}{2} * (4 - 3.296) + 40(t^* - 4) - .5 \times 12 \times 9.81 \, (t^* - 3.296) = 0$$

$$t^* = 5.2$$

مثال) سه استوانه فولادی کاملاً مشابه نشان داده شده می‌توانند بر روی محور افقی حرکت کنند. استوانه 2 و 3 ساکن و استوانه 1 با سرعت u به آنها نزدیک می‌شود. رابطه‌ای برای سرعت استوانه 3 پس از برخورد برحسب u و ضریب استرداد e بنویسید.



استوانه 1: u قبل از برخورد به 2 ، u'_1 پس از برخورد به 2

استوانه 2: 0 قبل از برخورد به 1 ، u'_2 پس از برخورد به 1

استوانه 3: 0 قبل از برخورد با 2 ، u پس از برخورد با 2

برای هر دو برخورد در راستای محور استوانه‌ها قانون ضربه و مومنتوم خطی را می‌نویسیم

$$m u_1 = m u'_1 + m u'_2 \qquad m u'_2 = m u''_2 + m u$$

$$e = \frac{u'_2 - u'_1}{u} \qquad e = \frac{u - u''_2}{u'_2}$$

$$u = u'_1 + u'_2$$

$$u'_2 - u'_1 = eu \rightarrow u'_2 - (u - u'_2) = eu \rightarrow u'_2 = \frac{1}{2}(1+e)u$$

$$u'_2 = u''_2 + u$$

$$e u'_2 = u - u''_2 \qquad u = \frac{1}{2}(1+e)(u'_2) = \frac{1}{4}(1+e)^2 u = u$$

PAPNO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل مسائل ۱

۱) اگر $S(t)=V$ ⇐ $v(t)=?$ $a(t)=?$

پاسخ ۱) $v=\frac{ds}{dt}=S'$ $\quad a=\frac{d^2s}{dt^2}=S''$

۲) در یک حرکت مستقیم الخط موقعیت ذره نسبت به مبدا مختصات بصورت $S(t)=2t^3-3t^2+1$ داده شده مطلوب است) الف) سرعت و شتاب لحظه ای در لحظه های $t_1=1$ و $t_2=2$

پاسخ ۱) $t=0 \rightarrow S=1$ $\quad t=1 \rightarrow S=1$ $\quad t=2 \rightarrow S=5$

سرعت لحظه ای ⇐ مشتق ⇐ $6t^2-6t=S'$ $\quad v(2)=12$ $\quad v(1)=0$ m/s

شتاب لحظه ای ⇐ مشتق ⇐ $12t-6=S''$ $\quad a(2)=18$ $\quad a(1)=6$ m/s²

سرعت متوسط ⇐ $v_{ave}=\frac{S(2)-S(1)}{t_2-t_1}$

ب) سرعت و شتاب متوسط در فاصله زمانی $t=0$ و $t=2$ — پاسخ)

سرعت متوسط ⇐ $v_{ave}=\frac{S(2)-S(1)}{t_2-t_1}=\frac{12-8^{\,5-1}}{2}=2$ m/s

شتاب متوسط ⇐ $a_{ave}=\frac{v(2)-v(1)}{t_2-t_1}=\frac{12}{2}=0$

ج) کل مسافت طی شده پس از ۲ ثانیه — پاسخ)

$v=0 \Rightarrow 6t^2-6t=0 \Rightarrow t=0 \quad t=1$

$\Delta S=|\Delta s(t_1,t_0)|+|\Delta S(t_2,t_1)|=|S(1)-S(0)|+|S(2)-S(1)|=6$

چون منحنی در بازه ای از مسیر تغییر مسیر داده یعنی سرعت صفر گردیده

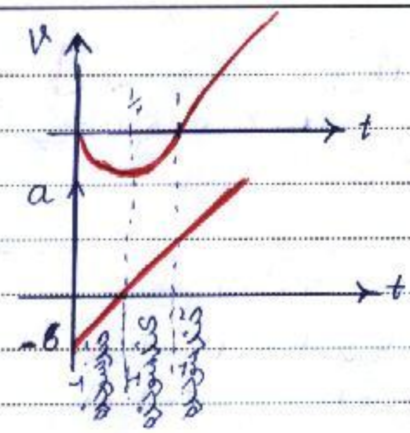
د) زمانی که متحرک مجدداً به مبدا مختصات برمی گردد. — پاسخ)

$S(t)=0 \Rightarrow 2t^3-3t^2+1=0 \Rightarrow (t-1)(2t^2-t-1)=0$ $\quad t=1$, $t=-\frac{1}{2}$ غ ق ق

$t=1$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. / /



$a \times v > 0$ حرکت تند شونده

$a \times v < 0$ حرکت کند شونده

۱۲) متحرکی با شتاب ثابت ۲ $\frac{m}{s^2}$ از حال سکون و از نقطه‌ای به فاصله ۱ متری مبدا در یک حرکت مسیر مستقیم حرکت می‌کند مطلوب است معادلات سرعت و موقعیت نسبت به زمان و مسافت طی شده پس از 10 ثانیه ؛

$a = 2$ ثابت

$a(t) = \frac{dv}{dt} \qquad dv = a\,dt \quad \int_{v=v_0}^{v} dv = \int_{t=0}^{t} a\,dt \Rightarrow v(t) - v(0) = \int_0^t a(t)\,dt$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a\,dt$$

$v(t) = \frac{ds}{dt} \qquad \int_{S_0}^{S} ds = \int_{t=0}^{t} v(t)\,dt \Rightarrow S(t) - S(0) = \int_0^t v(t)\,dt$

$$S(t) = S_0 + \int_0^t v\,dt$$

پاسخ ⇐

$v(t) = \int_0^t 2\,dt = 2t \qquad S(t) = 1 + \int_0^t 2t\,dt = 1 + t^2$

$v(t) = 0 \longrightarrow 2t = 0 \longrightarrow t = 0$

$S=0 \quad S=1 \quad S=0$

$\Delta S = \Delta S(t = 10, 0) = S(10) - S(0) = 100$

PAPNO

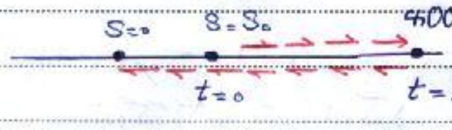
Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱۳) در یک حرکت مستقیم الخط $v = 300 - 75t^2$ است. مطلوب است مسافت طی شده پس از 3 ثانیه

پاسخ ۲

$$S = S_0 + \int_0^t v\,dt = S(t) = S(0) + \int_0^t 300 - 75t^2\,dt = S_0 - 25t^3 + 300t$$

$$v = 0 \rightarrow 300 - 75t^2 = 0 \qquad t = 2$$



$$\Delta S = |\Delta S(t = 2, 0)| + |\Delta S(t = 3, 2)| = |S(2) - S(0)| + |S(3) - S(2)| =$$

$$= |400 + S_0 - S_0| + |225 + S_0 - 400 - S_0|$$

$$= 575$$

۱۴) اگر $a(s) = ?$ ، $a(t) = ?$ $v(t) = ?$ $S(t) = ?$

پاسخ ۲) $a\,ds = v\,dv$

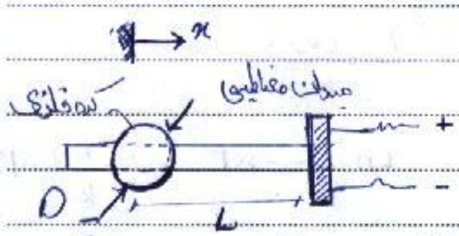
$$\int_{S_0}^{S} a\,ds = \int_{v_0}^{v} v\,dv \Rightarrow \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \quad v(S) = f(S)$$ بر حسب S ، v

$$v = \frac{ds}{dt} = f(s) \qquad \int_{S_0}^{S} \frac{d(s)}{f(s)} = \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow g(S) = t \leftarrow$$ تغییر متغیر

در نتیجه $S(t) = ?$ یعنی S بر حسب t به دست آمد

$$v(t) = \frac{dS}{dt} \qquad a(t) = \frac{d^2 s}{d^2 t}$$

۱۵)



$$a = \frac{K}{(L - x)^2}$$ (K ثابت)

در شیر برقی با لاپس از وصل سیم به برق میدان مغناطیسی ایجاد شده کره فلزی را جذب می‌کند شتاب کره فلزی متناسب است با عکس مجذور فاصله. مطلوب است سرعت کره فلزی در هنگام برخورد با صفحه مغناطیسی. $v = ?$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$a\,dx = v\,dv$$

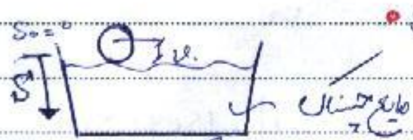
$$\frac{k}{(L-x)^2}\,dx = v\,dv \qquad \int_0^{L-\frac{D}{2}} \frac{k}{(L-x)^2}\,dx = \int_{v=0}^{v} v\,dv$$

$$\left.\frac{kx}{L(L-x)}\right|_0^{L-\frac{D}{2}} = \frac{1}{2}v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{k(2L-D)}{LD}}$$

16) گلوله‌ای با سرعت اولیه v_0 در مایع چسبناکی سقوط می‌کند.

الف) مسافتی که گلوله طی می‌کند تا بایستد

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد تا سرعت گلوله نصف شود



توضیح) آزمایشات نشان می‌دهد هرچه سرعت گلوله بیشتر باشد مقاومت مایع چسبناک بیشتر است

$$a = -kv \qquad a(v) = \checkmark$$

پاسخ) $S(t) = ?$ $\quad v(t) = ?$ $\quad a(t) = ?$

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv \qquad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{-kv} = \int_{t=0}^{t} dt \qquad -\frac{1}{k}\ln\frac{v}{v_0} = t$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -kt \qquad \frac{v}{v_0} = e^{-kt} \qquad v = v_0 e^{-kt}$$

$$S = \cancel{S_0} + \int_0^t v\,dt \Rightarrow S = \int v_0 e^{-kt}\,dt = v_0\left(-\frac{1}{k}e^{-kt}\right)\Big|_0^t$$

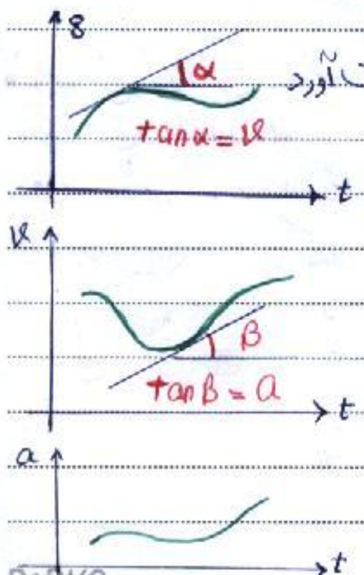
$$= v_0\left(-\frac{1}{k}e^{-kt} + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}\left(-v_0 \cancel{e^{-kt}} + v_0\right) \Rightarrow$$

الف) $S = \frac{1}{k}\left(\cancel{-v_0} + v_0\right) = \frac{v}{k} \qquad L = \frac{v_0}{k}$

$$v = v_0 e^{-kt} \Rightarrow \frac{v_0}{2} = v_0 e^{-kt} \qquad \ln\frac{1}{2} = -kt \qquad t = \frac{1}{k}\ln(2)$$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



بجای فرم تحلیلی منحنی تغییر مکان‌ها را داریم)

از روی منحنی چگونه می‌توان سرعت و شتاب لحظه‌ای را به دست آورد

شیب منحنی در هر لحظه → مشتق → $v = \frac{ds}{dt}$

شیب منحنی سرعت در هر لحظه → مشتق → $a = \frac{dv}{dt}$

منحنی شتاب

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱. اگر منحنی (a-t) را داشته باشیم v و S را چگونه به دست آوریم

$v(t) = v_0 + \int_0^t a\,dt$ — سطح زیر منحنی a-t

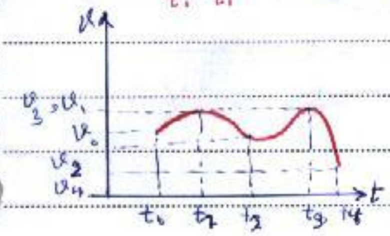
$v(t_0 + \Delta t) = v(t_1) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} a\,dt$

Δt بسیار کوچک $v(t_1) = v_0 + a_0 \Delta t$

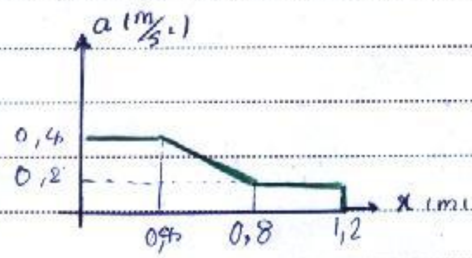
$v(t_2) = v(t_1 + \Delta t) = v(t_0 + 2\Delta t)$

$= v(t_1) + a_1 \Delta t$

⋮

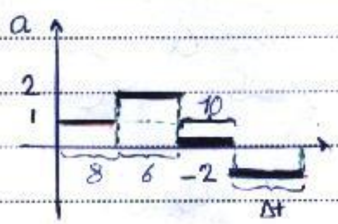


مثال)
در حرکت مستقیم الخط یک متحرک سرعت متحرک در مبدأ مختصات برابر $0.8\ m/s$ است. سرعت وی را در انتهای مسیر $x = 1.5\,m$ بیابید.



پاسخ)
$\int_{s=0}^{s=1.2} a\,ds = \int_{v=v_0}^{v} v\,dv \Rightarrow 0.4 \times 0.4 + \frac{0.4 + 0.2}{2} \times 0.4 + 0.2 \times 0.4$

$= \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}(v^2 - 0.8^2) \Rightarrow v = 1.2\ m/s$



مثال) ترنی فاصله بین دو ایستگاه را با شتاب های روبرو حرکت می کند. مطلوب است Δt زمان ترمز کردن ترن قبل از رسیدن به ایستگاه دوم

* آیا می توان فاصله دو ایستگاه را تأمین نمود (یافت)

پاسخ) $t = 0 \rightarrow v_0 = 0$ ، $v = 0$ سرعت در انتهای مسیر

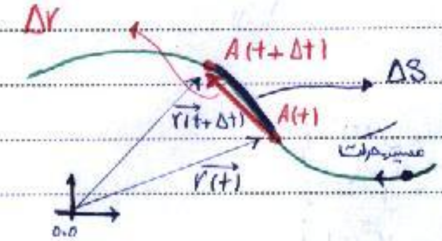
$a = \frac{dv}{dt}$ $\quad a\,dt = dv$ $\quad \underbrace{\int_{t=0}^{t} a\,dt}_{\text{سطح زیر منحنی}} = \int_0^0 dv = 0$ ⇐ سطح زیر منحنی = ۰

$1 \times 8 + 2 \times 6 + 0 \times 10 - 2 \times \Delta t = 0 \qquad \Delta t = 10$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حرکت منحنی الخط ذره (در صفحه)



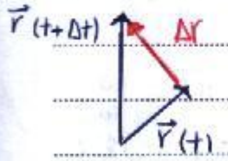
$r(t)$ بردار موقعیت لحظه‌ای ذره نسبت به مبدا

$\Delta(r)$ تغییرات بردار موقعیت

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

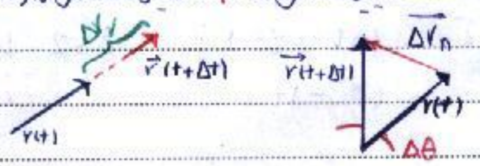
اگر $\Delta t \to 0$ باشد Δr مماس بر مسیر حرکت می‌گردد

بردار سرعت لحظه‌ای $= v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{dr}}{dt} = \vec{\dot r}$



تغییرات هم در اندازه و هم در جهت $\vec{r(t)}$ ایجاد شده است

$=$ تغییرات در اندازه (فقط) $+$ تغییرات در جهت (فقط)



$\Delta r = \Delta r_r + \Delta r_n$

تغییرات اندازه، تغییرات جهت

در حرکت ذره به روی مسیر دایره‌ای با r ثابت تغییرات فقط در راستای جهت است

بردار سرعت لحظه‌ای) یک بردار آزاد بوده (برای تعریف آن نیازی به مبدأ مختصات نیست) بردار سرعت همواره بر مسیر حرکت مماس است.

بردار شتاب لحظه‌ای $= a = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \vec{\dot v} = \vec{\ddot r}$

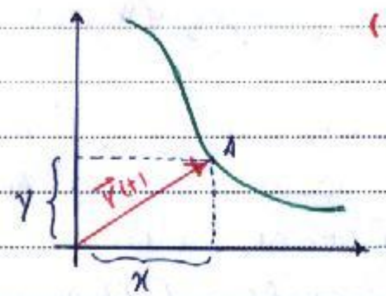
مطابق کیلومترشمار ماشین $\Rightarrow$ $\dot S = \frac{ds}{dt} =$ اندازه بردار سرعت (تندی) $|v| = v$

* $\ddot S$ مشتق v براساس تغییرات فقط اندازه v است و نه جهت $|a| = a \neq \ddot S$

محورهای مختصات در دینامیک: 1) دکارتی 2) قطبی (استوانه‌ای) $r-\theta$ 3) مماس و عمود بر مسیر حرکت $n-t$ کره B'

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date.



بررسی حرکت منحنی الخط ذره در صفحه‌های مختصات دکارتی)

$$\vec r(t) = x(t)\,\vec i + y(t)\,\vec j$$
$$\vec v(t) = \dot x(t)\,\vec i + \dot y(t)\,\vec j$$
$$\vec a(t) = \ddot x(t)\,\vec i + \ddot y(t)\,\vec j$$

مثال 2/57) در حرکت یک ذره در صفحه $x(t)=3t^2-4t$, $y(t)=4t^2-\frac{1}{3}t^3$
مطلوب است سرعت و شتاب لحظه‌ای در $t=2$

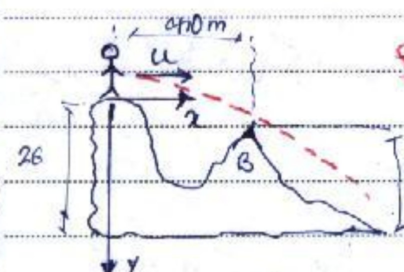
پاسخ) $\vec r = x\vec i + y\vec j$

$= (3t^2-4t)\,\vec i + (4t^2-\frac{1}{3}t^3)\,\vec j$ $\qquad \vec r = 4\vec i + \frac{40}{3}\vec j$

$\vec v = (6t-4)\,\vec i + (8t-t^2)\,\vec j$ $\qquad t=2 \quad \vec v = 8\vec i + 12\vec j$

$\vec a = (6)\,\vec i + (8-2t)\,\vec j$ $\qquad \vec a = 6\vec i + 4\vec j$

جهت بردار $= \tan^{-1}\frac{y}{x} = \alpha \Rightarrow \mathrm{Arc}\tan\frac{12}{8} = \alpha_v$



مثال 2/67) حداقل u چقدر باشد تا اسکی باز از B عبور کند؟

پاسخ $\overset{t=0}{\begin{cases} \dot x = u \\ \dot y = 0 \end{cases}}$ همواره $\begin{cases} \ddot x = a_x = 0 & \cancel{F_x} = m\cancel{a_x} \\ \ddot y = a_y = g & F_y = ma_y \\ & \cancel{m}g = \cancel{m}a_y \end{cases}$

انتگرال گیری $\begin{cases} \dot x = C_1 \\ \dot y = gt + C_2 \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} C_1 = u \\ C_2 = 0 \end{cases}$ انتگرال $\Rightarrow \begin{cases} x = ut + C_3 \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + C_4 \end{cases} \xrightarrow{t=0} C_3 = 0 \quad C_4 = 0$

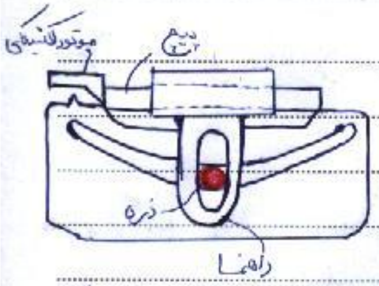
$\begin{cases} x = ut \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ $\quad$ Min u = شرط گذشتن از B صدق کردن B در روابط مقابل است

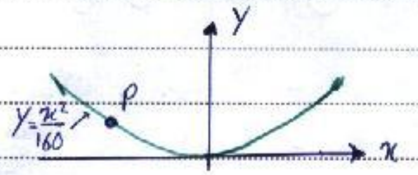
$\begin{cases} 40 = ut \\ 10 = \frac{1}{2}g(t)^2 \Rightarrow t = ? \end{cases} \Rightarrow u = 28\ \frac{m}{s}$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال 2/70)





با راه‌اندازی موتور الکتریکی و چرخش پیچ (۲-۳) pin P مقید است در داخل شیار حرکت کند اگر حرکت موتور به نحوی باشد که راهنما با سرعت ۲۰ $\frac{mm}{s}$ حرکت خطی داشته باشد (به صورت ثابت) در $x=60$ شتاب و سرعت لحظه‌ای pin P را پیدا کنید

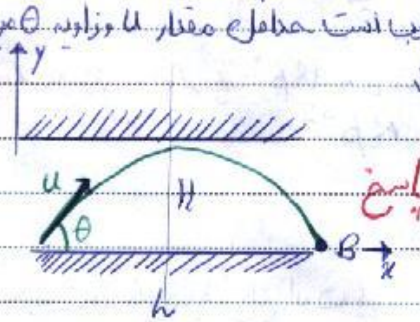
پاسخ) $\vec{v}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}$ $\quad v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ $\qquad$ ثابت $\dot{x}=20\ \frac{mm}{s}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{160} \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{x}{80}\dot{x} \qquad \dot{y}=\frac{2x\dot{x}}{160}$$

$$y''=\frac{x'^2+xx''}{80} \qquad x''=0 \text{ شتاب}$$

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\left(\frac{x\dot{x}}{80}\right)^2} \Rightarrow \sqrt{(20\times10^{-3})^2+\left(\frac{60\times20\times10^{-3}}{80}\right)^2}$$

مثال: پرتابه‌ای با سرعت u در امتداد یک طول پرتاب می‌شود مطلوب است حداقل مقدار u و زاویه θ مربوطه به نحوی که پرتابه بدون برخورد به سقف به نقطه B برسد



پاسخ) سرعت در طول مسیر ثابت است $v_x=u\cos\theta$

$v_y=$ متغیر

$F_x=ma_x \Rightarrow v_x=$ ثابت

$F_y=ma_y=mg\neq 0$

$\boxed{L=(u\cos\theta)t}$ $\quad t=\frac{L}{u\cos\theta}$ $\quad a_y=\frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \int_0^t a_y=\int_{u\sin\theta}^{v_y} dv_y$

$-gt=v_y-u\sin\theta$

$v_y(t)=-gt+u\sin\theta$ $\qquad$ در اوج $\boxed{0=-\frac{gt}{2}+u\sin\theta}$

جواب: $\theta=\frac{\pi}{2}$ $\quad u=\infty$

$u_{min}\to\theta=\frac{\pi}{4}$

$u_{min}=\sqrt{gL}$

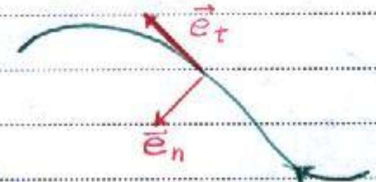
PAPNO

$$0=-g\frac{L}{2u\cos\theta}+u\sin\theta \qquad 2u^2=\frac{gL}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{gL}{\sin 2\theta} \qquad u=\sqrt{\frac{gL}{\sin 2\theta}}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

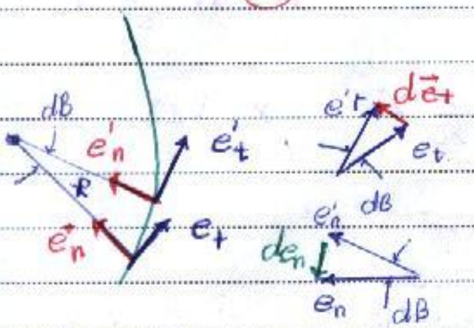
حرکت منحنی الخط ذره در صفحه در محورهای مختصات مماس و عمود بر مسیر حرکت (n-t)



- بردار یکه e_t همواره مماس بر مسیر حرکت و در امتداد حرکت و بردار یکه e_n همواره عمود بر مسیر حرکت و به سمت مرکز انحنا است

$$\vec{v} = v e_t \qquad |\vec{e}_t| = |\vec{e}_n| = 1$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \underbrace{\frac{d\bar{v}}{dt}}_{\dot{v}} e_t + v \frac{d\vec{e}_t}{dt}$$



$$de_t = |\vec{e}_t| \, d\beta \, \vec{e}_n \qquad \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\beta}{dt} \vec{e}_n = \dot{\beta} e_n$$

$$de_n = -\dot{\beta} e_t$$

$$\vec{v} = v \vec{e}_t \qquad \dot{\vec{v}} = \vec{a} = \dot{v} \vec{e}_t + v \dot{\beta} \vec{e}_n$$

$$\vec{a} = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n$$

$a_t = \dot{v}$, $R\ddot{\beta} = \ddot{s}$ ناشی از تغییر اندازه بردار سرعت و $a_n = v\dot{\beta} = R\dot{\beta}^2$ ناشی از تغییر جهت بردار سرعت

$$ds = R \, d\beta \qquad v = \frac{ds}{dt} = R\dot{\beta}$$

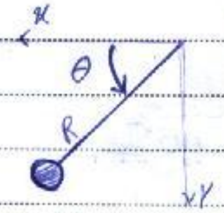
حرکت روی دایره با شعاع ثابت :

$$a_t = R\alpha \qquad a_n = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

(ω سرعت زاویه‌ای)

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال ۱ در $\theta = 60$ مقادیر ذیل موجود است $R = 2\,m$ ، $\dot{\theta} = 2\,\frac{Rad}{s}$ ، $\ddot{\theta} = 2.93\,\frac{Rad}{s}$

رابطه‌ای برای موقعیت جرم در زمان‌های مختلف بنویسید.

حل به روش محورهای دکارتی

پاسخ) $x = R\cos\theta \qquad y = R\sin\theta$

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} = (R\cos\theta)\vec{i} + (R\sin\theta)\vec{j}$$

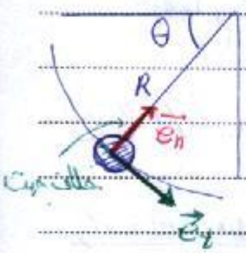
(یادآوری) $\frac{d}{dt}\cos\theta = \underbrace{\frac{d}{d\theta}\cos\theta}_{(-\sin\theta)\dot{\theta}} \times \frac{d\theta}{dt}$

مشتق $r(t)$: $v(t) = \dot{r}(t) = R(-\dot{\theta}\sin\theta)\vec{i} + R(\dot{\theta}\cos\theta)\vec{j}$

$$a(t) = \ddot{r}(t) = R[(-\ddot{\theta}\sin\theta) - \dot{\theta}^2\cos\theta]\vec{i} + R[(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)]\vec{j}$$

$$if = \theta = 60 \Rightarrow \begin{cases} a_x = -9.09\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \\ a_y = \frac{9.09}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

حل به روش محورهای مماسی و عمودی

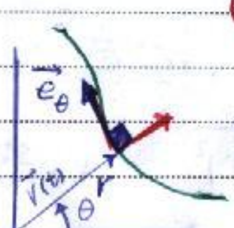


$$\vec{r}(t) = -R\vec{e}_n = -R(-\dot{\theta}\vec{e}_t) = R\theta\vec{e}_t$$

$$v(t) = -R(-\dot{\theta}\vec{e}_t) = R\dot{\theta}\vec{e}_t$$

$$a(t) = R\ddot{\theta}\vec{e}_t + R\dot{\theta}^2\vec{e}_n$$

• بررسی حرکت منحنی الخط ذره در صفحه در محورهای مختصات قطبی ($r - \theta$)



دو بردار یکه $\vec{e}_\theta$ و $\vec{e}_r$ را داریم که $\vec{e}_r$ در امتداد R و $\vec{e}_\theta$ در راستای افزایش زاویه θ و عمود بر e_r

لزوماً e_θ بر مسیر حرکت مماس نیست (مهم)

$|e_r| = |e_\theta| = 1$

$\vec{r}(t) = r\vec{e}_r$ مشتق $\dot{r}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{e}_r\ (\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$

PAPNO

نکته = $\begin{cases} \dot{e}_r = \dot{\theta}e_\theta \\ \dot{e}_\theta = -\dot{\theta}e_r \end{cases}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\vec{r}(t) = r\vec{e}_r$

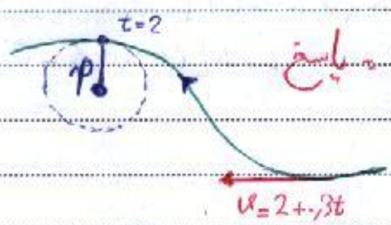
$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\vec{a}(t) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}e_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

$= (\ddot{r} + r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$

$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$ $\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$ $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$, $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$

مسئله) ذره P در حرکت منحنی الخط در صفحه با سرعت $v = 2 + 0.3t$ در حرکت است در $t = 2$ شتاب کل ذره $2.4\ \frac{m}{s^2}$ است مطلوب است شعاع انحنای مسیر حرکت در $t = 2$



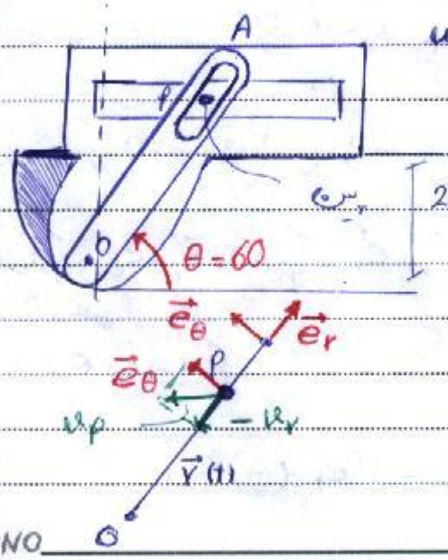
پاسخ: $\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n$

$a_t = \dot{v} = \rho\ddot{\beta}$ شتاب کل $= \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$

$a_n = \rho\dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{\rho}$ $\dot{v} = 0.3$

شتاب کل $= 2.4\ \frac{m}{s^2} = \sqrt{(\frac{v^2}{\rho})^2 + (\dot{v})^2} \Rightarrow 2.4 = \sqrt{(\frac{2.6}{\rho})^2 + (0.3)^2}$

مثال 2/137)



$\omega_{OA} = \dot{\theta} = 2\ \frac{Rad}{s}$

در $\theta = 60$ مقادیر v_p و a_p را بیابید؟

میلی 200

پاسخ: $\vec{v} = \underbrace{\dot{r}}_{v_r}\vec{e}_r + \underbrace{r\dot{\theta}}_{v_\theta}\vec{e}_\theta$

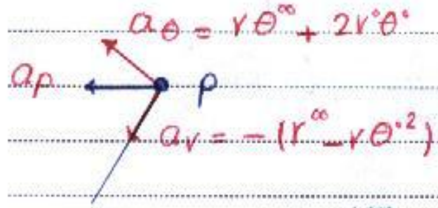
$v_p = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$ $r = \frac{200}{\sin\theta}$

حرکت مقید $\begin{cases} v_p\cos\theta = \dot{r} \\ v_p\sin\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$

$v_p = \frac{r\dot{\theta}}{\sin\theta} = \frac{\frac{200}{\sin\theta} \times 2}{\sin\theta} \Rightarrow \theta = 60 = \frac{1600}{\sqrt{3}}\ \frac{m}{s}$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date.

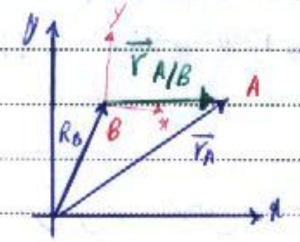


حرکت معین $\begin{cases} a_p \cos\theta = -\ddot{r} + r\dot{\theta}^2 \\ a_p \sin\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$

$2\left(-\frac{800}{3}\right)\times 2 = \frac{3200}{3} \Rightarrow a_p = \frac{-6400}{3\sqrt{3}}$

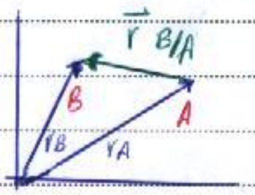
از رابطه قبلی $\dot{r} = -\frac{1600}{\sqrt{3}}\cos 60 = -\frac{800}{\sqrt{3}}$

• حرکت نسبی ذره در صفحه)



$r_A = r_B + r_{A/B}$ ← موقعیت ذره A نسبت به B

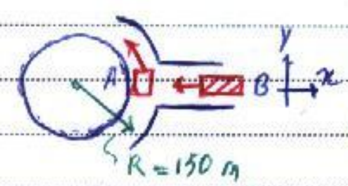
$$\begin{cases} \vec{a}_A = \vec{a}_B + a_{A/B} \\ \vec{v}_A = \vec{v}_B + v_{A/B} \end{cases}$$



$$\begin{cases} r_B = r_A + r_{B/A} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + a_{B/A} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_A + v_{B/A} \end{cases}$$

➡ $\vec{r}_{B/A} = -\vec{r}_{A/B}$ $\quad \vec{v}_{B/A} = -\vec{v}_{A/B}$ $\quad \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_{A/B}$

مثال 2/183)



$v_B = 81 \frac{km}{h}$ ثابت، $a_B = -3 \, m/s^2$

$v_A = 54 \frac{km}{h}$ ثابت،

سرعت و شتاب خودرو B نسبت به راننده A

$v_{B/A} = ?$ $\quad a_{B/A} = ?$

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$ $\qquad \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

$\vec{v}_{B/A} = -\left(81 \times \frac{5}{18}\right)\vec{i} - 54 \times \frac{5}{18}\,\vec{j}$ $\qquad v_{B/A} = \sqrt{\left(81 \times \frac{5}{18}\right)^2 + \left(54 \times \frac{5}{18}\right)^2}$

$= 97 \times \frac{5}{18} \, m/s$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$ $\quad a_{B/A} = a_B - a_A$ $\quad \frac{v^2}{R}$

$= -(-3\vec{i}) - \left(\frac{(54 \times \frac{5}{18})^2}{150}\right)i$

$a_{B/A} = \sqrt{\quad}$

مسائل 19 - 20 - 22 - 39 - 51 - 62 - 71 - 72 - 75 - 83 - 91

110 - 117 - 124 - 138 - 139 - 142 - 147 - 155 - 200

مثال) در تعقیب حرکت راکتی به وسیله رادار در لحظه مورد نظر نتایج زیر ثبت شده است
شعاع انحنای مسیر حرکت در لحظه ثبت نتایج

$r = 10.5$ km

$\dot{r} = 480$ m/s

$\dot{\theta} = 0$

$\ddot{\theta} = 0.00720$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r$

$\dot{\vec{r}} = v = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$ $\quad$ اندازه $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

$\vec{v} = v\vec{e}_t$ $\quad \frac{v^2}{\rho}$

$\vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\beta}\vec{e}_n$

$\rho\, d\beta = ds$

$\rho\dot{\beta} = v$

$\dot{\beta} = \frac{v}{\rho}$ شعاع انحنای مسیر

$v \rightarrow \frac{dv}{dt} = a_t$ $\quad v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$ $\quad$ اندازه v

$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{2\dot{r}\ddot{r} + 2(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})(r\dot{\theta})}{2\sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}}$ $\quad$ در لحظه ثبت نتایج $a_t = \frac{2\dot{r}\ddot{r}}{2\dot{r}} = \ddot{r}$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

$a_t = \ddot{r} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\ddot{\theta}$

$$a = \sqrt{(\ddot{r})^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} = \sqrt{(\ddot{r})^2 + (r\ddot{\theta})^2}$$

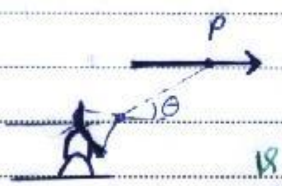
$$\frac{v^2}{\rho} = r\ddot{\theta} \qquad \frac{\dot{r}^2}{\rho} = r\ddot{\theta} \Rightarrow \rho = \frac{\dot{r}^2}{r\ddot{\theta}} = \frac{(480)^2}{(10.5\times10^3)(0.0012)}$$

$\rho = 3047\ m$

۱۳۳، تمرین (الف $\qquad \theta = 60 \rightarrow \dot{\theta} = -0.02$

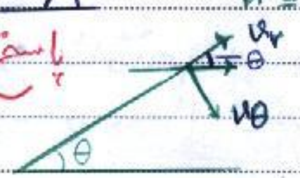
مطلوب است در لحظه مورد نظر سرعت افقی هواپیما و $\ddot{r}$

v_p = سرعت افقی هواپیما $\qquad \ddot{r} = ?$



$$v = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

پاسخ



$$v_r \sin\theta = v_\theta \cos\theta$$

$$\dot{r}\sin\theta = r\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{r}\sin 60 = \frac{10*10}{\sin 60}(0.02)\cos 60$$

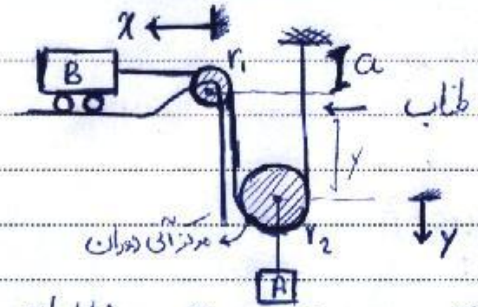
$$v_p = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

ب) $\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta e_\theta = 0 \Rightarrow a_r = 0 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \Rightarrow \ddot{r} = r\dot{\theta}^2$

$a_\theta = 0 = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

$$= \frac{(10*10)^3}{\sin 60}(-0.02)^2$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



* حرکت مقید ذرات متصل به هم ۱

طول طناب $L = x + \frac{\pi r_1}{2} + y + \pi r_2 + y + a$ طول طناب همیشه ثابت است

پس مشتق طول همواره صفر است

$\frac{dL}{dt} = 0 \rightarrow \dot{x} + \dot{y} + \dot{y} = 0$ $\quad \dot{x} = -2\dot{y} \Rightarrow \boxed{v_B = 2v_A}$

اگر x با گذشت زمان زیاد شود y با گذشت زمان کم می‌شود

$\boxed{a_B = 2a_B}$

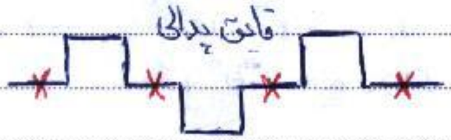
* سرعت نسبی طناب نسبت به قرقره به صورت لحظه‌ای صفر است

مرکز آنی دوران دسته شاتون

* دسته شاتون هم دوران دارد هم انتقال

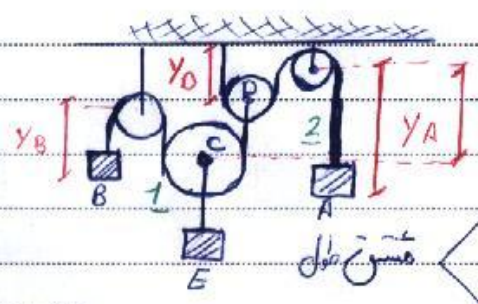
* پیستون فقط انتقال دارد

تحلیل فیزیکی مرکز دوران آن است که سرعت مرکز لحظه صفر است



مقدار ثابت +

مثال ۱ طول طناب $1 \Rightarrow L_1 = y_B + y_C + (y_C - y_D)$



مقدار ثابت + طول طناب 2 $\quad L_2 = y_D + y_D + y_A$

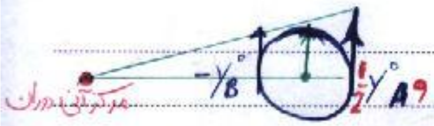
مشتق طول

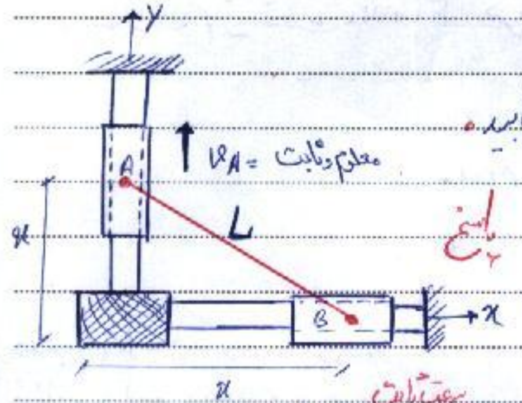
$\dot{y}_B + 2\dot{y}_C - \dot{y}_D = 0 \quad \times 2$

$2\dot{y}_D + \dot{y}_A = 0$

PAPNO

$2\dot{y}_B + 4\dot{y}_C + \dot{y}_A = 0$





مثال)

v_A ثابت و معلوم، رابطه‌ای برای شتاب و سرعت نقطه B بیابید.

پاسخ

$$x^2 + y^2 = L^2$$

مشتق $\Rightarrow 2\dot{x}x + 2\dot{y}y = 0 \qquad \dot{y} = v_A$

$$\dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y} = -\frac{y}{x}v_A = v_B$$

سرعت ثابت

$$\cancel{2}\ddot{x}x + \cancel{2}\dot{x}^2 + \cancel{2\ddot{y}y} + \cancel{2}\dot{y}^2 = 0$$

$$\ddot{x}x = -\dot{x}^2 - \dot{y}^2$$

$$-\frac{y}{x}v_A \rightarrow v_B$$

$$\ddot{x} = a_B = \frac{1}{x}\left[-\left(\frac{y}{x}v_A\right)^2 - v_A^2\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل سوم :

سینتیک حرکت ذره

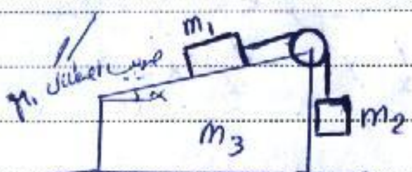
بررسی قانون دوم نیوتون $F=ma$ در محورهای مختلف مختصاتی

دکارتی محورهای مختصات $\Rightarrow \Sigma F_x = m a_x \quad \Sigma F_y = m a_y$

$r-\theta$ محورهای مختصات قطبی $\Rightarrow \Sigma F_r = m a_r \quad \Sigma F_\theta = m a_\theta$

$n-t$ محورهای مختصات $\Rightarrow \Sigma F_n = m a_n \quad \Sigma F_t = m a_t$

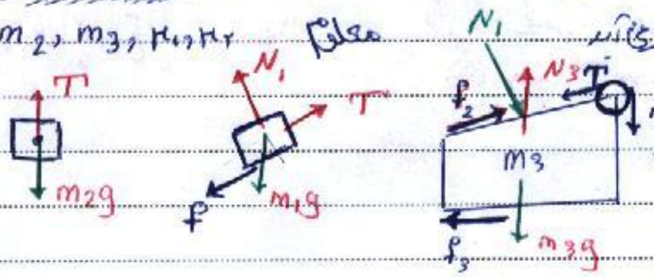
مثال: سیستم از حال سکون رها می‌شود
مطلوب است شتاب هر جرم



$\alpha, m_1, m_2, m_3, \mu_1, \mu_2$ معلوم

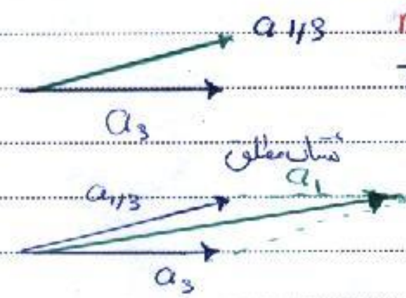
جرم m_2 به سمت پایین می‌رود

ترسیم دیاگرام آزاد نیرو



شتاب جرم m_1 نسبت به m_3

$\vec{a}_1 = \vec{a}_3 + \vec{a}_{1/3}$
شتاب نسبی



قانون دوم نیوتن فقط و فقط برای شتاب‌های مطلق صادق است

جرم $m_2 \rightarrow m_2 g - T = m_2 a_2$

در راستای سطح جرم $m_1 \rightarrow T - m_1 g \sin\alpha - f = m_1 (a_{1/3} + a_3 \cos\alpha)$

$a_{2/3} = a_2 \quad a_{1/3} = a_{2/3} = a_2$ ✓

جرم m_1 در راستای عمود بر سطح $\Rightarrow N_1 - m_1 g \cos\alpha = (0 - a_3 \sin\alpha)$

شتاب مطلق جرم m_1 عمود بر سطح شیب دار

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

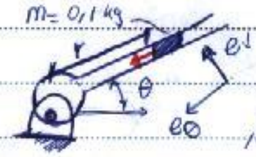
$f = \mu_1 N_1$

درراستای افق m_3 جرم $\Rightarrow -f_3 + f\cos\alpha + N_1\sin\alpha - T\cos\alpha = m_3 a_3$

درراستای قائم m_3 جرم $\Rightarrow N_3 - N_1\cos\alpha + f\sin\alpha - T - T\sin\alpha - m_3 g = 0$

$f_3 = \mu_2 m_3$

مسأله



$\dot{r} = -1.2$ $\dot{\theta} = 3\ \frac{Rad}{s}$

سرعت ذره نسبت به لوله $1.2\ m/s$ در $\theta = 30°$ نیروی عکس العمل وارده از دیواره لوله به ذره را کاسبه کنید.

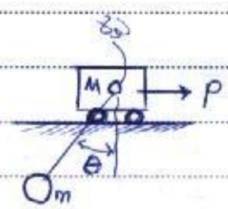
پاسخ

$\Sigma F_r = ma_r \rightarrow -mg\sin\theta = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

$\Sigma F_\theta = ma_\theta \rightarrow N - mg\cos\theta = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$

$N = m(g\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta})$ $\quad N = 0/1(9,81\cos 30 + 2(-1,2)(3))$

$N = 0,129\ N$



زاویه‌ای که پاندول با محور قائم می‌سازد چقدر است؟

$\Sigma F_x \Rightarrow ma_x$ $\quad \Sigma F_y = ma_y$

$P = (m + M)a$ $\quad N = mg + Mg$

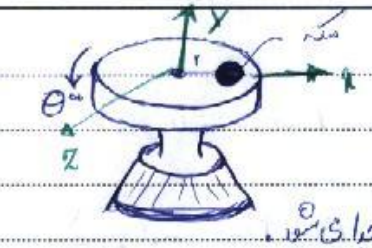
$\Sigma F_x = ma_x \quad T\sin\theta = ma$

$\Sigma F_y = ma_y \quad T\cos\theta = mg$

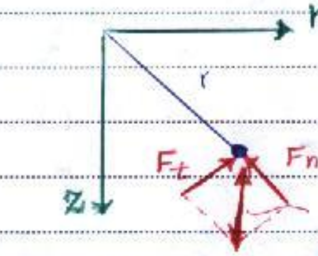
$\left\{ \tan\theta = \frac{a}{g} = \frac{\frac{P}{m+M}}{g} \right.$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



مثال) μ_s ضریب اصطکاک استاتیک بین سکه و سطح
سیستم با شتاب زاویه ای ثابت $\ddot{\theta}$ شروع به چرخش می‌کند
سیستم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند پس از چند دور سکه از روی سطح جدا می‌شود.



$$F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2} = \mu_s N = \mu_s mg$$

$$F_{a} = m a_t = m(\rho \ddot{\beta})$$

$$F_n = m a_n = m(\rho\dot{\beta})^2 = m\frac{v^2}{\rho}$$

نیروی اصطکاک F

$$F_r = m a_r = m(\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)$$

$$F_\theta = m a_\theta = m(\cancel{\dot{r}\dot{\theta}} + r\ddot{\theta})$$

$\dot{r}$ و $\ddot{r}$ صفر است چون شعاع تغییر نمی‌کند

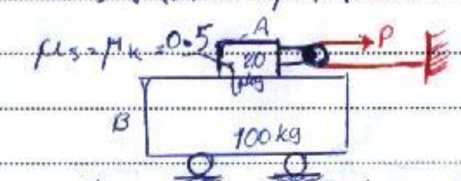
$$\alpha = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} = \text{ثابت}$$

انتگرال $\dot{\theta} = \alpha t + C_1 \xrightarrow[\dot{\theta}=0]{t=0} C_1 = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \alpha t$

$$f = \sqrt{(mr\ddot{\theta})^2 + (mr(\ddot{\theta}t)^2)^2} = \mu_s mg$$

$\dot{\theta} = \alpha t$ انتگرال $\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + C_2 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ \theta=0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad t^2 = \frac{2\theta}{\ddot{\theta}}$

$$f = \sqrt{(mr\ddot{\theta})^2 + \left(mr\ddot{\theta}\,\frac{2\theta}{\ddot{\theta}}\right)^2}$$



3/18) مطلوب است شتاب a_A و a_B در دو حالت
$P = 60$ و $P = 90$

پاسخ) $f_{s\,max} = \mu_s N_A = \mu_s m_A g = (0.5)(20)(9.81) = 98.1$ N

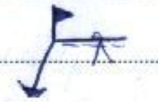
$$2P - f = m_A a_A$$

$$f = m_B a_B$$

در حالت اول $P = 40$, $2P = 80$ $\quad 80 < 98.1$ f_{max}
دو جسم نسبت بهم حرکت نمی‌کنند

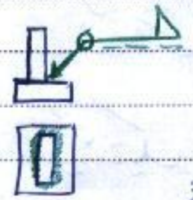
PAPNO

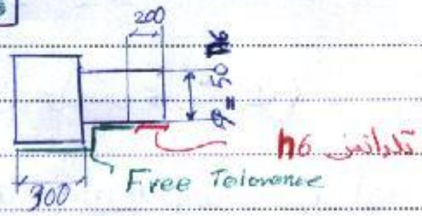
Subject:
Year. Month. Date. ( )



جوش پرچمی ▶ یعنی جوشکاری در محل استقرار قطعه (سایت) انجام گیرد.

جوش حلقوی) یعنی از یک نقطه جوشکاری شروع و به همان نقطه انتها یابد



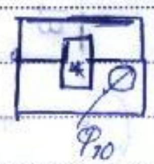


نقشه‌های مونتاژی جوش کاری: در مورد نقشه های جوش استاندارد نقشه ساخت و مونتاژ را روی یک کاغذ می‌کشند

چون در این مرحله دارای مراحل مونتاژ و ساخت هستیم (به علت وجود اعوجاج و ...) نقشه جوش و ساخت را در یک کاغذ می‌کشیم

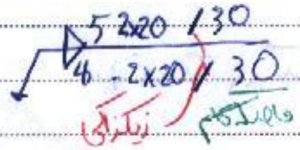
اگر تعداد قطعاتی که مونتاژ - جوشکاری می‌شوند زیاد باشد
اگر تعدادی از قطعات به وسیله جوشکاری و تعدادی دیگر به روش‌های دیگر مونتاژ شوند

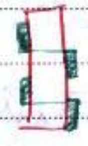
در هر یک از دو حالت فوق نقشه مونتاژی و نقشه ساخت جدا بررسی می‌شوند مانند جلسه گذشته منتها
در نقشه‌های ساخت قسمت‌هایی که پس از جوشکاری انجام می‌شوند را مشخص می‌کنیم



سوراخ φ10 ... پس از جوشکاری انجام شود

صفحه ۶۸ و ۶۹





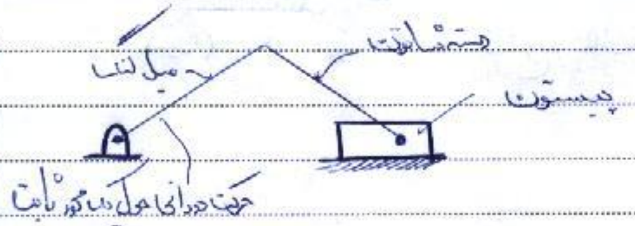
PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

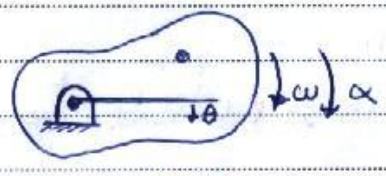
فصل ششم

سینماتیک ذره جسم صلب

ذره: سینماتیک / سینتیک



حرکت دورانی حول یک محور ثابت)



سرعت زاویه‌ای $\omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$ $\frac{rad}{sec}$

$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t=0}^{t} \omega dt$ $\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega dt$

$S(t) = S_0 + \int_0^t v dt$

شتاب زاویه‌ای $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ $\frac{rad}{s^2}$ $\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t=0}^{t} \alpha dt$

$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt$

$v(t) = v_0 + \int_0^t \alpha dt$

$\vec{\alpha}$ و $\vec{\omega}$ بردارهای آزاد هستند

$a_n = r\omega^2$ شتاب جانب به مرکز

$\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow d\theta = \omega dt$

$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \rightarrow d\omega = \alpha dt$

$v = r\omega$

$a = r\alpha$ شتاب مماسی

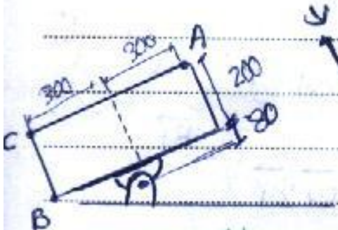
$v = \vec{r} \times \vec{\omega}$

$a_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



اگر ضلع BC دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $6\ \frac{Rd}{s}$ در جهت عقربه‌های ساعت باشد مطلوب است

$v_A = ?$

$a_A = ?$

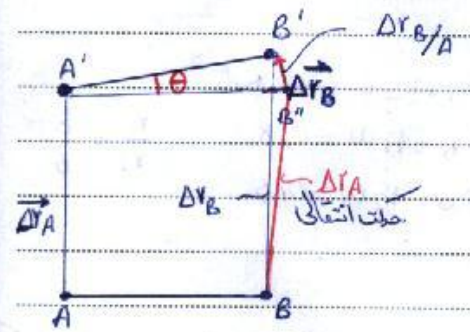
$\omega = -6k$

$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r} = (-6k)(0.280\,j + 0.300\,i)$

$v_A = -(-6)(0.280)\,\vec{i} + (-6)(0.30)\,\vec{j} = 1.68\,i - 1.8\,j$

$a_A = a_t + a_n = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = (-6\vec{k})(1.68\,i - 1.8\,\vec{j})$

$= -10.08\,\vec{j} - 10.8\,\vec{i}$



حرکت کلی جسم صلب در صفحه:

ترکیبی است از یک حرکت انتقالی $AB \rightarrow A'B''$

بعلاوه یک حرکت دورانی حول یک محور ثابت

A' به اندازه زاویه θ و سرعت و شتاب زاویه ω و α

$\Delta r_{B/A}$ حرکت دورانی حول یک محور ثابت (A)

$\Delta\vec{r}_B = \Delta\vec{r}_A + \Delta\vec{r}_{B/A}$

چون B را نسبت به A می‌سنجیم یعنی مبدا A است $AB \xrightarrow{\text{ثابت}} |A|$

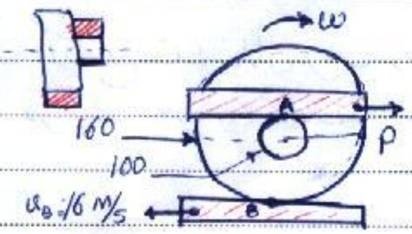
$v_B = v_A + v_{B/A} = v_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$a_B = a_A + a_{B/A} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

روابط سینماتیک بین دو نقطه دلخواه از جسم صلب

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date.



مثال ۱)
با فرض مطلوب است سرعت نقطه P

$\vec{V}_P = \vec{V}_B + \vec{V}_{P/B} = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BP}$

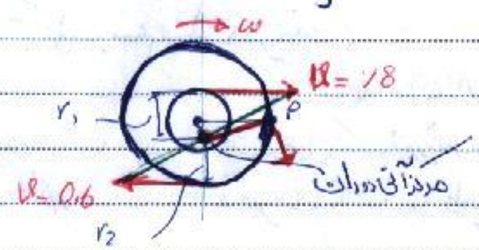
$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} = V_B + \omega \times r_{BA}$

$0.8 i = (-0.6 \vec{i}) + (-\omega \vec{k}) \times (0.260 \vec{j})$ $\omega = \frac{1.4}{0.26}$

عمود بر هم های سمت

$V_P = -0.6 i + \left(\frac{1.4}{0.26}\right) \times (0.160 \vec{j} + 0.160 \vec{i})$

$\vec{V}_P = 0.2 \vec{i} - 0.8 \vec{j}$

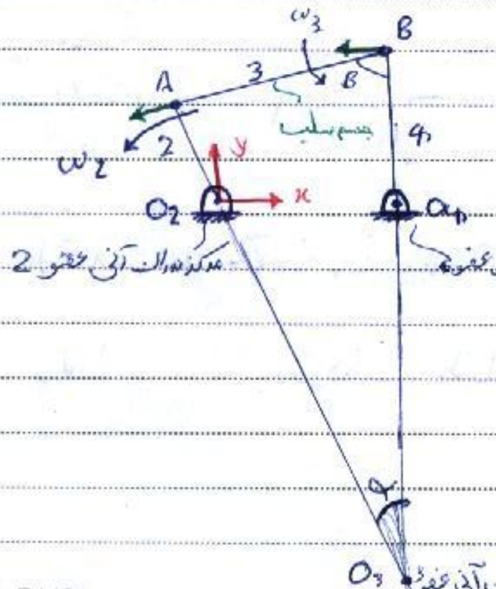


$r_1 + r_2 = 260 \times 10^{-3}$

$V_A = r_1 \omega = 0.8$ $\frac{r_1}{r_2} = \frac{8}{6}$

$V_B = r_2 \omega = 0.6$

مکانیزم چهارعضوی



$x_A = -60$

$y_A = 80$ $O_4B = 180$

$\omega_2 = 10\ \frac{rad}{s}$ $AB = 260$

$O_2O_4 = 180$

مطلوب است ω_3, ω_4

$\omega_3 = \frac{V_A}{O_3A}$ $V_B = \omega_3 \times O_3B$

$\omega_4 = \frac{V_B}{O_4B}$

PAPNO

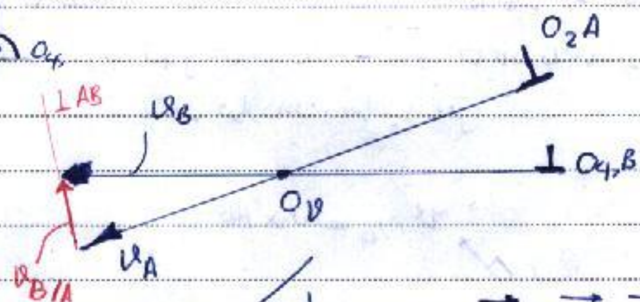
$\tan\alpha = \frac{y_B}{x_A} = \frac{6}{8} \rightarrow \alpha = 58^\circ$

$AB = 260$ $\qquad \frac{O_3B}{\sin 90} = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{O_3A}{\sin\beta} \rightarrow O_3A\ ✓ \quad O_3B = ✓$

$O_2O_4 = 180$

$\beta = \text{Arccos}\ \frac{180-160}{260} = \ ✓$

روش 2) حل به روش ترسیم چندضلعی های سرعت



B، A دو نقطه از یک جسم صلب $\rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$

روش 3) حل مسأله از روش تحلیل

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = v_A + \omega_3 \times \underbrace{\vec{r}}_{\vec{AB}}$$

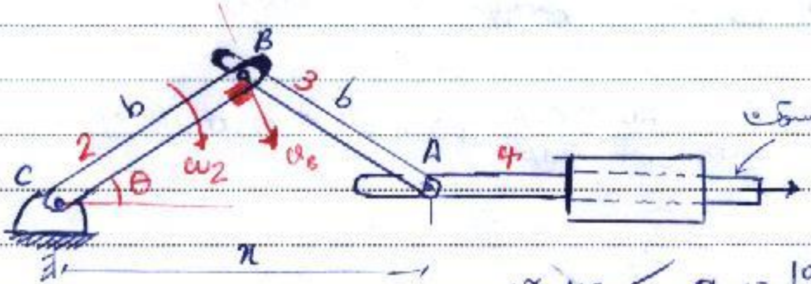
$$v_B(-\vec{i}) = v_A\cos\alpha(-\vec{i}) + v_A\sin\alpha(-\vec{j}) + \omega_3\vec{k} \times (\cos\beta\ \vec{j} + \sin\beta\ \vec{i}) \times 260$$

$\omega_3 = ✓$ ضرایب i، j را از دو طرف متحد قرار دهید

$v_B = ✓$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال)



پیستون A با شتاب ثابت a در حرکت است

سیستم از حال سکون و x=0

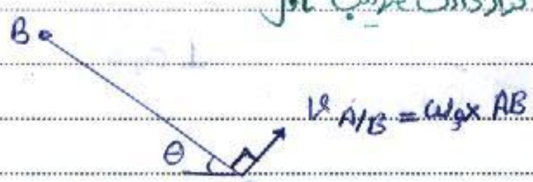
مطلوب است ω_{AB}

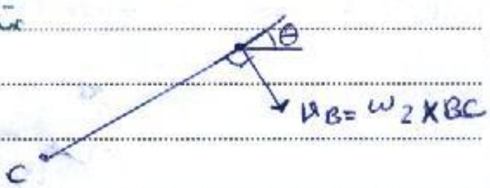
A و B متعلق به جسم صلب AB

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + v_{A/B}$$

$$v_A\vec{i} = (v_B\sin\theta)\vec{i} - v_B\cos\theta\,\vec{j} + b\omega_3\cos\theta\,\vec{j} + b\omega_3\sin\theta\,\vec{i}$$

متحد قرار دادن ضرایب i و j

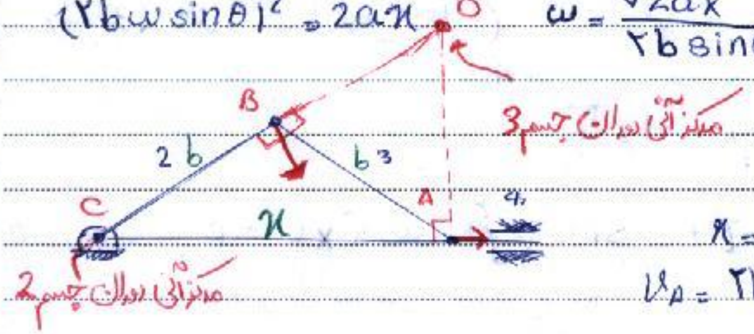




$$\begin{cases} v_A = b(\omega_3+\omega_2)\sin\theta \rightarrow v_A = 2b\omega\sin\theta \\ 0 = b(\omega_3-\omega_2)\cos\theta \rightarrow \omega = \omega_3 = \omega_2 \end{cases}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

$$(۲b\omega\sin\theta)^2 = 2ax \qquad \omega = \frac{\sqrt{2ax}}{۲b\sin\theta}$$



$|AD| = x\tan\theta$

$v_A = AD\,\omega_3 = x\omega_3\tan\theta$

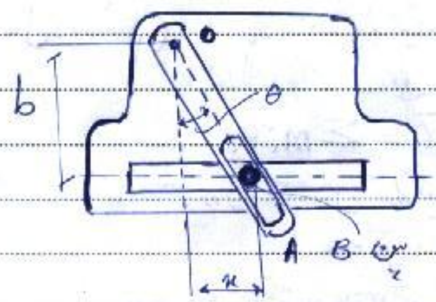
$x = 2b\cos\theta$

$v_A = ۲b\omega_3\sin\theta \qquad \omega_3 = \omega_2 = \omega$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال ۱)



بازوی OA با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = \dot{\theta}$ حول O
می‌چرخد
رابطه‌ای بین سرعت و شتاب پین B بدست آورید)

$$x = b\tan\theta$$

$$v_B = \dot{x} = b\dot{\theta}(1+\tan^2\theta) = b\omega(1+\tan^2\theta)$$

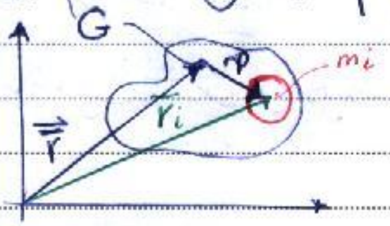
$$a_B = \ddot{x} = b\cancel{\ddot{\theta}}(1+\tan^2\theta) + b\dot{\theta}\, 2\dot{\theta}\tan\theta(1+\tan^2\theta)$$

سرعت زاویه‌ای ثابت

$$a_B = 2b\omega^2(1+\tan^2\theta)\tan\theta$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل ششم) سینتیک حرکت جسم صلب در صفحه



اعمال نیرو صحبت می‌شود

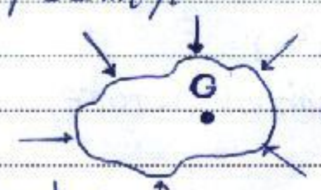
$m\times\bar{r} = \sum m_i r_i$

اگر مبدا مختصات روی مرکز ثقل قرار گیرد

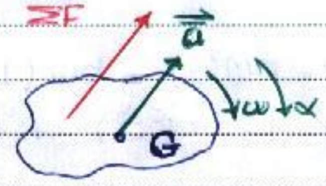
$\bar{r} = \bar{x} = \bar{y} = 0$

$m\times\bar{x} = \sum m_i x_i$ $\qquad$ $\sum m_i r_i = \sum m_i y_i = \sum m_i x_i = 0$

$m\times\bar{y} = \sum m_i y_i$



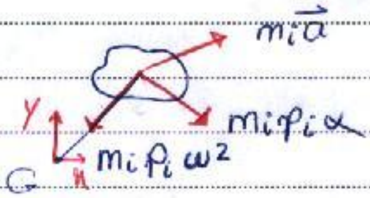
$=$



$a_A = \vec{a} + (a_{A/G})$

$(a_{A/G})_t + (a_{A/G})_n$

$(a_{A/G})_n = \rho_i\,\omega^2$ $\qquad$ $(a_{A/G})_t = \rho_i\,\alpha$



نیروهای اعمالی به ذره i ام

ممان نیروهای اعمالی به ذره i ام)

$\bar{M}_i = (m_i\rho_i\alpha)\rho_i + (m_i\vec{a}\cos\beta)y_i - (m_i\vec{a}\sin\beta)x_i$

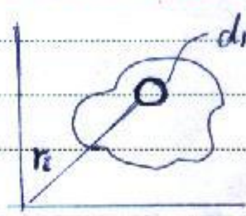
ممان کلیه نیروهای اعمالی به جسم صلب $\sum M_G = \sum\bar{M}$

$= \sum m_i\rho_i^2\alpha + \sum m_i y_i(\vec{a}\cos\beta) - \sum m_i x_i(\vec{a}\sin\beta)$

چون مبدا مختصات روی مرکز ثقل در نظر گرفته شده است

$\sum M_G = (\sum m_i\rho_i^2)\,\alpha = \bar{I}\alpha$

ممان اینرسی جرمی

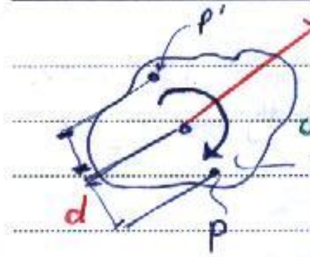


یادآوری $= I_o = \int r^2\,dm$

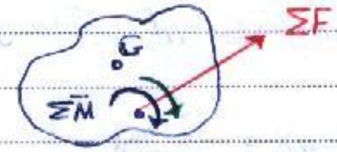
PAPNO

$\bar{I}\alpha = \sum\bar{M} = \sum M_G$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

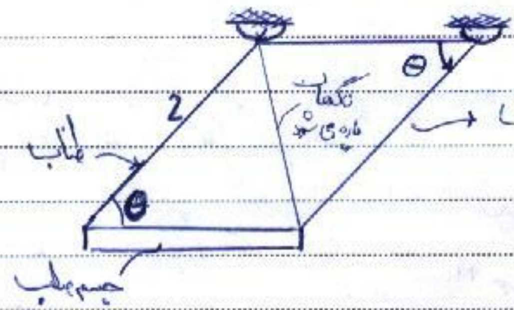


$\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$

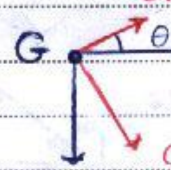


$$\Sigma M_P = \bar{I}\alpha + \underbrace{(m\bar{a})}_{\Sigma F} d$$

$$\begin{cases} \Sigma M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \\ \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \\ \Sigma F = m\bar{a} \end{cases}$$



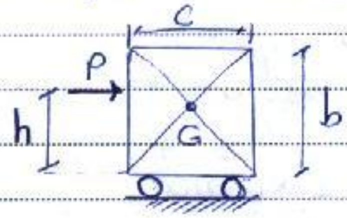
(ω و α جسم صلب صفر است)



$a_n = r\omega^2$ $\qquad \bar{a}_x$ $\qquad a_t = r\alpha$ $\qquad \bar{a}_y$

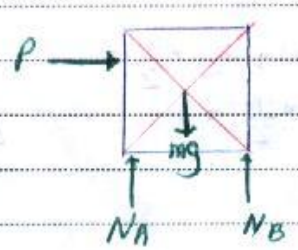
$$\sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

مثال)



مطلوب است P_{max} به نحوی که صندوق نچرخد؛

الف) $h=b$ باشد ب) $h=0$ باشد



$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \rightarrow P = m\bar{a}$$

$$\Sigma F_y = m\bar{a}_y \rightarrow N_A + N_B = mg$$

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma M_G = \bar{I}\alpha = \bar{I}(0) = 0$$

نچرخد

$$* \; N_A \times \frac{c}{2} + P\left(h - \frac{b}{2}\right) - N_B \times \frac{c}{2} = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای حالت 1 وقتی $P=P_{max}$ که در آن N_A به دلیل جدا شدن از زمین صفر می‌گردد
در این صورت $N_B=Mg$ و در نتیجه

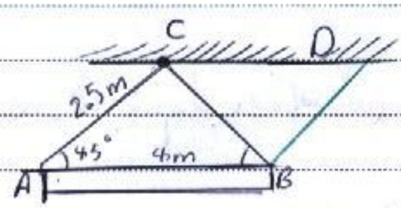
$$P_{max} = \frac{c}{b} mg$$

برای حالت 2 وقتی $P=P_{max}$ که در آن N_B برابر صفر باشد

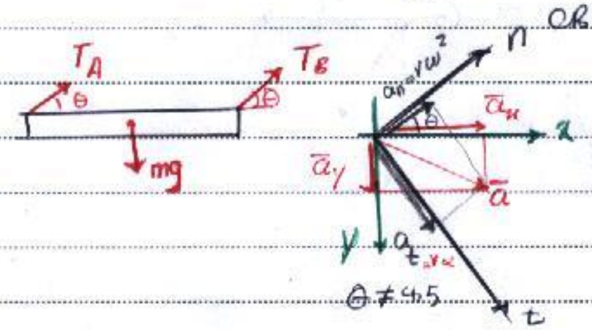
$$P_{max} = \frac{c}{b} mg$$

در هر دو حالت

$$\bar{a} = \frac{c}{b} g$$



مثال 1)
جرم میله AB ، 100 کیلوگرم است
اگر طناب CB پاره شود مطلوب است کشش در طناب BD
بلافاصله بعد از پاره شدن طناب CB

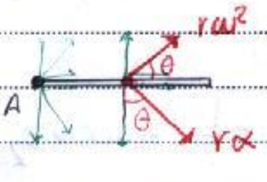


$$\left\{ \begin{array}{l} \bar a_A = \bar a_G = \bar a_B \\ \bar V_A = \bar V_G = V_B \end{array} \right.$$
جسم حرکت انتقالی دارد

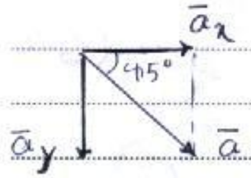
ω و α جسم AB صفر باشد
α و ω طناب خالی صفر است

$$\Sigma \vec F = m \bar a$$
$$\Sigma \bar M_G = \bar I \alpha$$
$$\Sigma M_P = \bar I \alpha + m \bar a d$$

$$\Sigma M_A = \bar I \alpha + m \bar a d$$
جسم صلب
$$-T_B \sin\theta * 4 + mg * \frac{4}{2} = - m r \omega^2 \sin\theta * \frac{4}{2} + m r \alpha \cos\theta \frac{4}{2}$$



Subject:
Year. Month. Date. ( )



در لحظه پاوشن شتاب BC ← $\left.\begin{matrix}\theta = 45 \\ \omega = 0 \quad \alpha \neq 0\end{matrix}\right\}$

(حالت خاص) if $\theta = 45$ $\boxed{\bar{a}_x = \bar{a}_y = r\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$-T_B \cancel{\sin 45}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} * 4 + \cancel{m}^{100} g * \frac{4}{2} = \cancel{m}^{100} \cancel{r}^{2.5} \alpha \cancel{\cos 45}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} * \frac{4}{2} \quad ✡$$

$$\begin{cases} \sum F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow -T_A \sin\theta - T_B \sin\theta + mg = m\bar{a}_y & -T_A \frac{\sqrt{2}}{2} - T_B \frac{\sqrt{2}}{2} + mg = m\bar{a}_y \\ \sum F_x = m\bar{a}_x \quad T_A \cos\theta + T_B \cos\theta = m\bar{a}_x & T_A \frac{\sqrt{2}}{2} + T_B \frac{\sqrt{2}}{2} = m\bar{a}_x \end{cases}$$

$\bar{a}_x = \bar{a}_y \Rightarrow \cancel{m}(g - \bar{a}_y) = \cancel{m}\bar{a}_x \qquad \bar{a}_x = \bar{a}_y = \frac{g}{2} = r\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}_{a_x, a_y}$

اگر بخواهیم α را در معادله $\sum F_x$ یا $\sum F_y$ بگذاریم به این خاطر که θ در آن است و θ هم متغیر است کار مشکل می‌شود

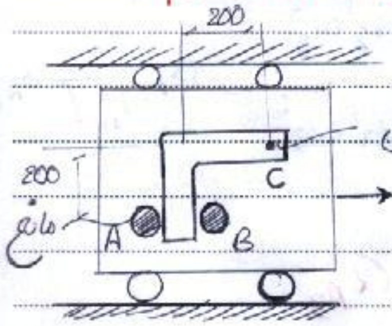
اما در معادله ✡ چون α نداریم راحت است

$\alpha = \checkmark$ در معادله ✡ قرار دهیم

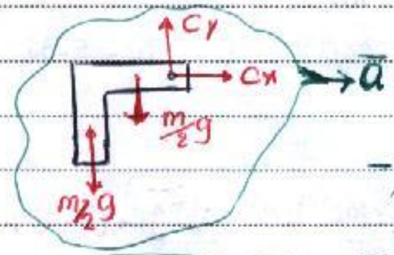
مثال ۱ $\frac{1}{6}$

شتاب a را چنان تعیین کنید که نبشی نه به مانع A بچسبد و نه به مانع B

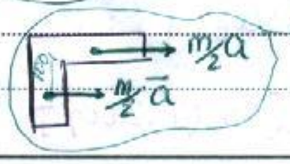
وزن نبشی 3kg



$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_c = \cancel{\bar{I}\alpha} + m\bar{a}d$ (چون نمی‌چرخد)



$$-\cancel{\frac{m}{2}} g * 200 \times 10^{-3} - \cancel{\frac{m}{2}} g * 100 \times 10^{-3} = -\cancel{\frac{m}{2}} a * 0.1$$



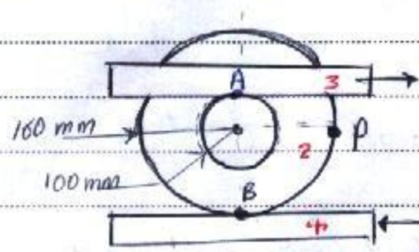
$\bar{a} = a \qquad -0.3g = -0.1a$

$a = 3g$

PAPNO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

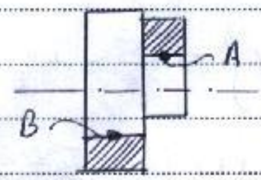
مثال)

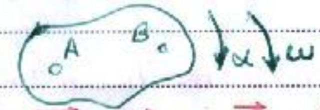


$\begin{cases} v = 0.8\ m/s \\ a = 2\ m/s^2 \end{cases}$

مطلوب است سرعت و شتاب نقطه P

$\begin{cases} v = 0.6 \\ a = 0 \end{cases}$

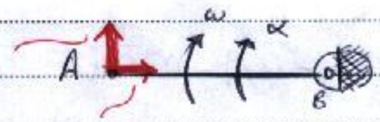




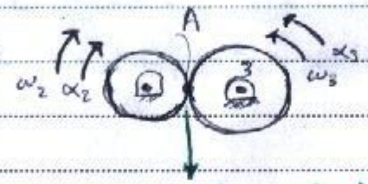
$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B})_t + \vec{a}_{A/B})_n$

$r\alpha = a_{A/B})_t$



$r\omega^2 = a_{A/B})_n$



$a_{A_2})_n = r_2 \omega_2^2$

But $\Rightarrow a_{A_2})_n \neq a_{A_3})_n$

$a_{A_3})_n = r_3 \omega_3^2$

$a_{A_2})_t = a_{A_3})_t$

مولفه های مماسی یکی است

$\Rightarrow a_{A_2} \neq a_{A_3}$

$v_A = v_B + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$0.8\,\vec{i} = .6\,\vec{i} + (-\omega \vec{k}) \times \overbrace{(0.260 \times \vec{j})}^{AB}$ $\quad \omega = 5.38\ \frac{rad}{s}$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r}$

$\underbrace{2\vec{i}}_{\vec{a}_{A_2})_t} - \underbrace{(0.1)(5.38)^2 \vec{j}}_{a_{A_2})_n} = \underbrace{0}_{a_{B_2})_t} + \underbrace{(0.160)(5.38)^2 \vec{j}}_{a_{B_2})_n} + (-5.38\vec{k}) \times$

$[(-5.38\,\vec{k})(0.260\,\vec{j})] + (-\alpha\,\vec{k}) \times (0.260)\,\vec{j}$

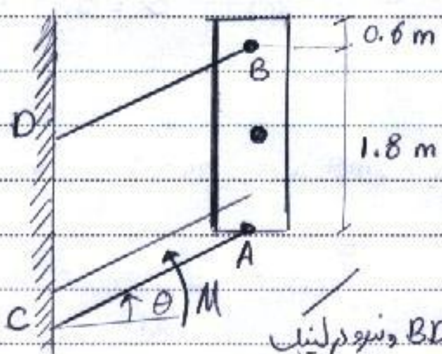
PAPNO

$\alpha = 7{,}692 \ \frac{rad}{s^2}$

$\vec{a}_P = \vec{a}_B + \vec{a}_{P/B} = \vec{a}_B + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + (\vec{\alpha} \times \vec{r})$

$= 0(-\vec{i}) + (0{,}160)(5.38)^2 \vec{j} + (-5.38\vec{k})[(-5.38\vec{k}) \times (0{,}160\vec{j} + 0{,}16\vec{i})]$

$+ (-7{,}692\vec{k})(0{,}160\vec{j} + 0{,}160\vec{i}) = \boxed{-1{,}2\vec{j} - 3{,}4\vec{i}}$



مثال :

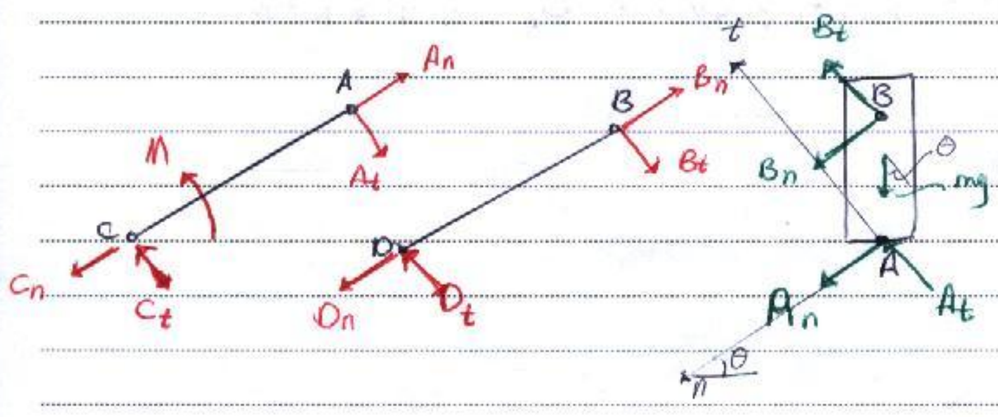
$m_{AB} = 150 \ kg$

$M = 5 \ kN \, m$

وزن لینک های AB و BD ناچیز است

سیستم از حال سکون در $\theta = 0$ شروع به حرکت می کند

مطلوب است شتاب زاویه ای لینک های AC و BD و نیرو در لینک BD وقتی $\theta = 30^\circ$



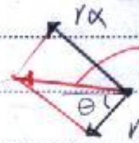
Subject:
Year. Month. Date.

$AC: \sum M_C = \cancel{\bar{I}\alpha} + \cancel{m\bar{a}d} = 0 \quad A_t * 1.5 = 5*10^3 \rightsquigarrow A_t = 3333\ N$

$BO: \sum M_D = \cancel{\bar{I}\alpha} + \cancel{m\bar{a}d} = 0 \quad B_t * 1.5 = 0 \quad B_t = 0$ (عضو BD دو نیروی است)

چون عملاً B_t و D_t صفر ی شود

و D_n و B_n هم راستا هستند



$\vec{a}_A = \vec{a}_B = a_G$

جسم AB: $\Rightarrow \sum F_t = ma_t$

$A_t - mg\cos\theta = ma_t = mr\alpha$

$3333 - (150)*9.81\cos\theta = (150)(1.5)\alpha$

$\alpha = 14.81 - 6.56\cos\theta \qquad \theta = 30° \qquad \alpha = 9.15\ \frac{rad}{s^2}$

جسم AB $\sum M_A = \bar{I}\cancel{\alpha} + m\bar{a}d \Rightarrow$

$-B_n\cos\theta * 1.8 = -mr\alpha\sin\theta * 1.2 - mr\omega^2\cos\theta * 1.2$

$\omega d\omega = \alpha d\theta \qquad \int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta (14.81 - 6.54\cos\theta)d\theta$

$\omega^2 = 29.6\,\theta - 13.08\sin\theta$

$\theta = 30° \rightsquigarrow \omega^2 = 8.47 \rightsquigarrow B_n = 2.147 * 10^3\ N$

PAPNO